BTS1-Chapitre 5 - Exercices : La fonction exponentielle

Ex 1 : Résoudre, on donnera la valeur exacte de la solution, puis la valeur arrondie au centième.

1° $e^x = 3$ $\quad e^x > -1$ $\quad e^{2x} = 5$ $\quad 0{,}5e^x - 4 = 0$ $\quad 2e^x - 1 > 0$

2° $\ln(x) = 3$ $\quad \ln(x) = -2$ $\quad \ln(2x) = 5$ $\quad \ln(x) > 20$

Ex2

1° Pour chaque fonction : dérivée, signe de la dérivée, tableau de variation

$f(x) = e^x - 2x + 1$ $\qquad D = [0\,;5]$

$g(x) = 3e^x + 4x$ $\qquad D = [-2\ ;4]$

$h(x) = 4e^x + e^{0,5x+3}$ $\qquad D = [0\,;\ \ 4]$

2° La fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$

On admet que sa dérivée est définie par $f'(x) = (7 - 3x)e^{-x}$

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

Ex3 : Dans un pays, 20% des ménages n'ont pas de véhicule et la répartition du parc motorisé est modélisé par la fonction f telle que $f(x) = 0{,}668e^x - 0{,}816$, avec $x \geq 0{,}2$

où $f(x)$ est la proportion du parc motorisée détenue la proportion x% des ménages du pays.

1° Calculer la proportion du parc motorisée détenue par 50% des ménages.

2° Calculer la proportion des ménages possédant 80% du parc motorisé.

Ex4 : On considère la fonction f définie sur [0; 5] par $f(x) = (-0{,}2x + 1)e^x$

On admet que : $f'(x) = e^x(-0{,}2x + 0{,}8)$

1° Etudier le signe de $f'(x)$

2° Dresser le tableau de variations de la fonction f sur [0 ; 5].

On donnera la valeur exacte du maximum de la fonction f, puis la valeur arrondie à 0,01 près.

Ex5 : Etude du recul, d'un glacier des Alpes

Une 1ère mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait $25{,}6\ km$

Des mesures régulières ont permis de modéliser la longueur du glacier $f(t)$ en km en fonction du nombre t d'années écoulées depuis 1900 par $f(t) = 25{,}8 - 0{,}2 \times e^{0,025t}$

1° Calculer $f'(t)$ puis déterminer son signe

2° Dresser le tableau de variation de la fonction f

3° Estimer la longueur du glacier en 2016

4° Estimer l'année de disparition du glacier

Ex6 :

Un laboratoire d'analyses sanitaires s'intéresse à l'évolution d'une substance polluante présente dans un réservoir contenant 60000 litres d'eau et destiné à abreuver du bétail. Le technicien en charge des analyses maintient ce volume d'eau tout au long de l'expérimentation.

On admet que le volume, exprimé en litres, de substance polluante présente dans le réservoir est modélisé par une fonction f définie par $f(t) = 1800 - 1800e^{-0,03t}$

où t est le temps exprimé en minutes. $t \geq 0$

1° a) Calculer $f'(t)$

b) Etudier le signe de $f'(t)$

2° Dresser le tableau de variation de f

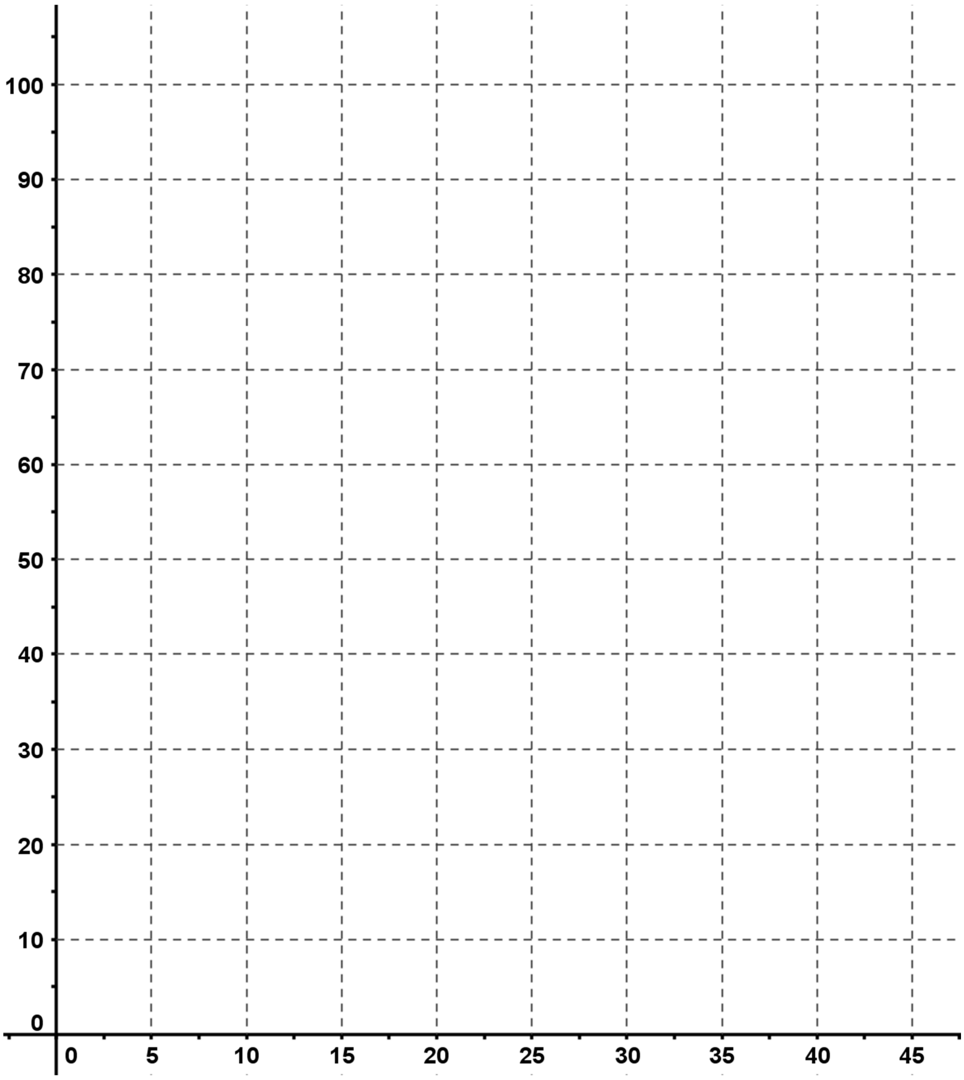
3° La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance polluante dans le réservoir dépasse 1500 litres.

Déterminer le temps à partir duquel la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de cette substance polluante. Vous donnerez la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité près.

Ex7 : Un entreprise fabrique un nouveau modèle d'appareils avec ports USB.
L'entreprise envisage de vendre chaque appareil entre 15€ et 40€ l'unité. Avant la commercialisation, l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée et offerte en fonction du prix de vente. On estime que si chaque appareil est vendu au prix unitaire de x € :
Le nombre $f(x)$ d'appareils demandés, en milliers, s'exprime par $f(x) = 200e^{-0,1x}$ où $x \in [15 ; 40]$
Le nombre $g(x)$ d'appareils offerts, en milliers, que l'entreprise est capable de produire s'exprime par :
$g(x) = 4x - 60$ avec $x \in [15 ; 40]$.

1° a) Si l'entreprise propose l'appareil au prix de 23€, déterminer la quantité demandée, à 10 appareils près.
b) Calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f
c) Compléter le tableau de valeurs (arrondir au dixième), puis tracer la courbe représentative de la fonction f

x	15	20	25	30	35	40
$f(x)$						



d) A l'aide la calculatrice, déterminer dans quel intervalle doit se situer le prix unitaire (à 0,1€ près) pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 9000 appareils.

2° a) Calculer $g(15)$ et (40) . Interpréter les valeurs obtenues.
b) Tracer la droite représentant la fonction g

3° a) A l'aide de la calculatrice, déterminer le prix d'équilibre à 1€ près, et le nombre d'appareils vendus, à 1 millier près, que l'entreprise peut compter vendre à ce prix.
b) Calculer le chiffre d'affaires à l'équilibre.

Ex 1 : Résoudre, on donnera la valeur exacte de la solution, puis la valeur arrondie au centième.

$e^x = 3$ $x = \ln(3)$ $x \approx 1{,}10$	$e^x > -1$ $vrai\ sur\ \mathbb{R}$	$e^{2x} = 5$ $2x = \ln(5)$ $x = \frac{1}{2}\ln(5\ )$ $x \approx 0{,}80$	$0{,}5e^x - 4 = 0$ $0{,}5e^x = 4$ $e^x = 8$ $x = \ln(8)$ $x \approx 2{,}08$	$2e^x - 1 > 0$ $e^x > \frac{1}{2}$ $x > \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$

$2e^x - 1 > 0$ $e^x > \frac{1}{2}$ $x > \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$	$\ln(x) = 3$ $x = e^3$ $x \approx 20{,}09$	$\ln(x) = -2$ $x = e^{-2}$ $x \approx 0{,}14$	$\ln(2x) = 5$ $2x = e^5$ $x = \frac{1}{2}e^5$ $x \approx 74{,}21$	$\ln(x) > 20$ $x > e^{20}$ $x \approx 485\ 165\ 195$

Ex2

Pour chaque fonction : dérivée, signe de la dérivée, tableau de variation

$f(x) = e^x - 2x + 1 \qquad D = [0\,;5]$

$g(x) = 3e^x + 4x \qquad D = [-2\ ;4]$

$h(x) = 4e^x + e^{0,5x+3} \qquad D = [0\,;\ \ 4]$

$f(x) = e^x - 2x + 1 \qquad D = [0\,;5]$

Dérivée

pour $x \in [0\,;5]$

$f'(x) = e^x - 2$

Signe de $f'(x)$

$e^x - 2 = 0 \iff x = \ln(2)$

$e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln(2)$

Tableau de variations

x	0		$\ln(2)$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	1,61	↗	139,41

Images

$f(0) = e^0 - 0 + 1 = 2$

$f(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\ln(2) + 1 = 3 - 2\ln(2) \approx 1{,}61$

$f(5) = e^5 - 10 + 1 = e^5 - 9 \approx 139{,}41$

$\boldsymbol{g(x) = 3e^{x} + 4x}$ $\boldsymbol{D = [-2\ ;4]}$

Dérivée

pour $x \in [-2\,;4]$

$g'(x) = 3e^{x} + 4$

Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$

Pour tout x, on a : $e^{x} > 0$ donc $3e^{x} + 4 > 0$ donc $g'(x) > 0$

Tableau de variations

x	-2		4
$g'(x)$		+	
$g(x)$		$\nearrow$	$179{,}79$
	$-7{,}59$		

Images

$g(-2) = 3e^{-2} - 8 \approx -7{,}59$

$g(4) = 3e^{4} + 16 \approx 179{,}79$

$\boldsymbol{h(x) = 4e^{x} + e^{0{,}5x+3}}$ $\boldsymbol{D = [0\ ;\ \ 4]}$

Dérivée

pour $x \in [0\,;4]$

$h'(x) = 4e^{x} + 0{,}5e^{0{,}5x+3}$

Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$

Pour tout x, on a : $e^{x} > 0$ et $e^{0{,}5x+3} > 0$

donc $4e^{x} + 0{,}5e^{0{,}5x+3} > 0$ donc $h'(x) > 0$

Tableau de variations

x	0		4
$h'(x)$		+	
$h(x)$		$\nearrow$	$366{,}81$
	$7{,}93$		

Images

$h(0) \approx 7{,}93$

$h(4) \approx 366{,}81$

2° La fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$

On admet que sa dérivée est définie par $f'(x) = (7 - 3x)e^{-x}$

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

Signe de $f'(x)$

$7-3x=0 \quad x=\frac{7}{3}$

$e^{-x}>0$ pour tout $x \in [0\,;4]$

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$7-3x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$2{,}29$	$\searrow$	$2{,}15$

Ex3

Dans un pays, 20% des ménages n'ont pas de véhicule et la répartition du parc motorisé est modélisé par la fonction f telle que $f(x)=0{,}668e^{x}-0{,}816$, avec $x \geq 0{,}2$
où $f(x)$ est la proportion du parc motorisée détenue par la proportion x% des ménages du pays.

1° Calculer la proportion du parc motorisée détenue par 50% des ménages.

$f(0{,}5)=0{,}668e^{0{,}5}-0{,}816 \approx 0{,}285$

Ainsi 50% des ménages possèdent 28,5% du parc motorisé.

2° Calculer la proportion des ménages possédant 80% du parc motorisé.

On résout $f(x)=0{,}8$

$0{,}668e^{x}-0{,}816=0{,}8$

$0{,}668e^{x}=0{,}8+0{,}816$

$0{,}668e^{x}=1{,}616$

$e^{x}=\frac{1{,}616}{0{,}668}$

$x=\ln\left(\frac{1{,}616}{0{,}668}\right)$

$x \approx 0{,}883$

Ainsi 88,3% des ménages possèdent 80% du parc motorisé.

Ex4

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x)=(-0{,}2x+1)e^{x}$

On admet que : $f'(x)=e^{x}(-0{,}2x+0{,}8)$

1° Etudier le signe de $f'(x)$

2° Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;5]$.

On donnera la valeur exacte du maximum de la fonction f, puis la valeur arrondie à 0,01 près.

Signe de $f'(x)$
$-0{,}2x + 0{,}8 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 4$
Pour tout x on a : $e^x > 0$

x	0		4		5
$-0{,}2x + 0{,}8$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Tableau de variations

x	0		4		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$10{,}92$	$\searrow$	0

Images
$f(0) = 1$ $\qquad$ $f(4) = 0{,}2e^4 \approx 10{,}92$ $\qquad$ $f(5) = 0 \times e^5 = 0$

Ex5 : Etude du recul, d'un glacier des Alpes
Une 1ère mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait $25{,}6\ km$
Des mesures régulières ont permis de modéliser la longueur du glacier $f(t)$ en km en fonction du nombre t d'années écoulées depuis 1900 par $f(t) = 25{,}8 - 0{,}2 \times e^{0{,}025t}$
1° Calculer $f'(t)$ puis déterminer son signe
2° Dresser le tableau de variation de la fonction f
3° Estimer la longueur du glacier en 2016
4° Estimer l'année de disparition du glacier

1° Dérivée
Pour $t \geq 0$
$f'(t) = 0 - 0{,}2 \times 0{,}025e^{0{,}025t} = -0{,}005e^{0{,}025t}$

signe de $f'(t)$
Pour tout , on a :
$e^{0{,}025t} > 0$
donc $-0{,}005e^{0{,}025t} < 0$
donc $f'(t) < 0$

2° **Tableau de variations**

t	0		194		195		$+\infty$
$f'(t)$		$-$					
$f(t)$	$25{,}6$	$\searrow$		0		$\searrow$	

3° année 2016 : $2016 = 1900 + 116$
2016 est l'année de rang 116
$f(116) \approx 22{,}165$
On peut estimer la longueur du glacier en 2016 à $22{,}165km$

4° Sachant que la fonction décroissante et d'après la table de la calculatrice

t	$f(t)$
194	$0{,}251$
195	$-0{,}3948$

Le plus petit entier t pour lequel $f(t) \leq 0$ est 195
1900+195 =2095
On peut estimer que le glacier aura disparu en 2095

Autre méthode
On résout
$f(t) < 0$
$25{,}6 - 0{,}2e^{0{,}025t} < 0$
$-0{,}2e^{0{,}025t} < -25{,}6$
$e^{0{,}025t} > \dfrac{25{,}6}{0{,}2}$
$e^{0{,}025t} > 128$
$0{,}025t > \ln(128)$
$t > \dfrac{1}{0{,}025}\ln(128)$
$t > 40\ln(128)$
Or $40\ln(128) \approx 194{,}08$

Ex6 :
Un laboratoire d'analyses sanitaires s'intéresse à l'évolution d'une substance polluante présente dans un réservoir contenant 60000 litres d'eau et destiné à abreuver du bétail. Le technicien en charge des analyses maintient ce volume d'eau tout au long de l'expérimentation.
On admet que le volume, exprimé en litres, de substance polluante présente dans le réservoir est modélisé par une fonction f définie par $f(t) = 1800 - 1800e^{-0{,}03t}$
où t est le temps exprimé en minutes. $t \geq 0$
1° a) Calculer $f'(t)$
b) Etudier le signe de $f'(t)$
2° Dresser le tableau de variation de f
3° La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance polluante dans le réservoir dépasse 1500 litres.
Déterminer le temps à partir duquel la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de cette substance polluante. Vous donnerez la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité près.

1° a) Pour $t \geq 0$
$f'(t) = 0 - 1800 \times (-0{,}03e^{-0{,}03t}) = 54e^{-0{,}03t}$

Signe de $f'(t)$
Pour tout réel t : $e^{-0{,}03t} > 0$ donc $54e^{-0{,}03t} >$ donc $f'(t) > 0$

2° **Tableau de variations**

t	0	59	60	$+\infty$
$f'(t)$		$+$		
$f(t)$	0	1500		$\nearrow$

3° on résout

$f(t) > 1500$

$1800 - 1800e^{-0,03t} > 1500$

$-1800e^{-0,03t} > -300$

$e^{-0,03t} < \dfrac{-300}{-1800}$

$e^{-0,03t} < \dfrac{1}{6}$

$-0,03t < \ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$

$t > \dfrac{1}{-0,03}\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$

$t > \dfrac{1}{0,03}\ln(6)$

$\dfrac{1}{0,03}\ln(6) \approx \ 59,7$

La santé du bétail sera menacé à partir de la 60ème minute, c'est-à-dire 1heure

Autre méthode :

La fonction est croissante

$f(59) \approx 1493 < 1500$

$f(60) \approx 1502 > 1500$

….

Ex7 : Un entreprise fabrique un nouveau modèle d'appareils avec ports USB.

L'entreprise envisage de vendre chaque appareil entre 15€ et 40€ l'unité. Avant la commercialisation, l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée et offerte en fonction du prix de vente. On estime que si chaque appareil est vendu au prix unitaire de x € :

Le nombre $f(x)$ d'appareils demandés, en milliers, s'exprime par $f(x) = 200e^{-0,1x}$ où $x \in [15\,;40]$

Le nombre $g(x)$ d'appareils offerts, en milliers, que l'entreprise est capable de produire s'exprime par :

$g(x) = 4x - 60$ avec $x \in [15\,;40]$.

1° a) Si l'entreprise propose l'appareil au prix de 23€, déterminer la quantité demandée, à 10 appareils près.

b) Calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f

c) Compléter le tableau de valeurs (arrondir au dixième), puis tracer la courbe représentative de la fonction f

x	15	20	25	30	35	40
$f(x)$						

1° a) $f(23) = 200e^{-0,1\times 23} = 200e^{-2,3} \approx 20,051$

Au prix unitaire de 23€, la demande sera de 20051 appareils

1° b) Dérivée

Pour $x \in [\,15\,;40]$

$f'(x) = 200 \times (-0{,}1e^{-0{,}1x}) = -20e^{-0{,}1x}$

Signe de $f'(x)$

Pour tout , on a :

$e^{-0{,}1x} > 0$

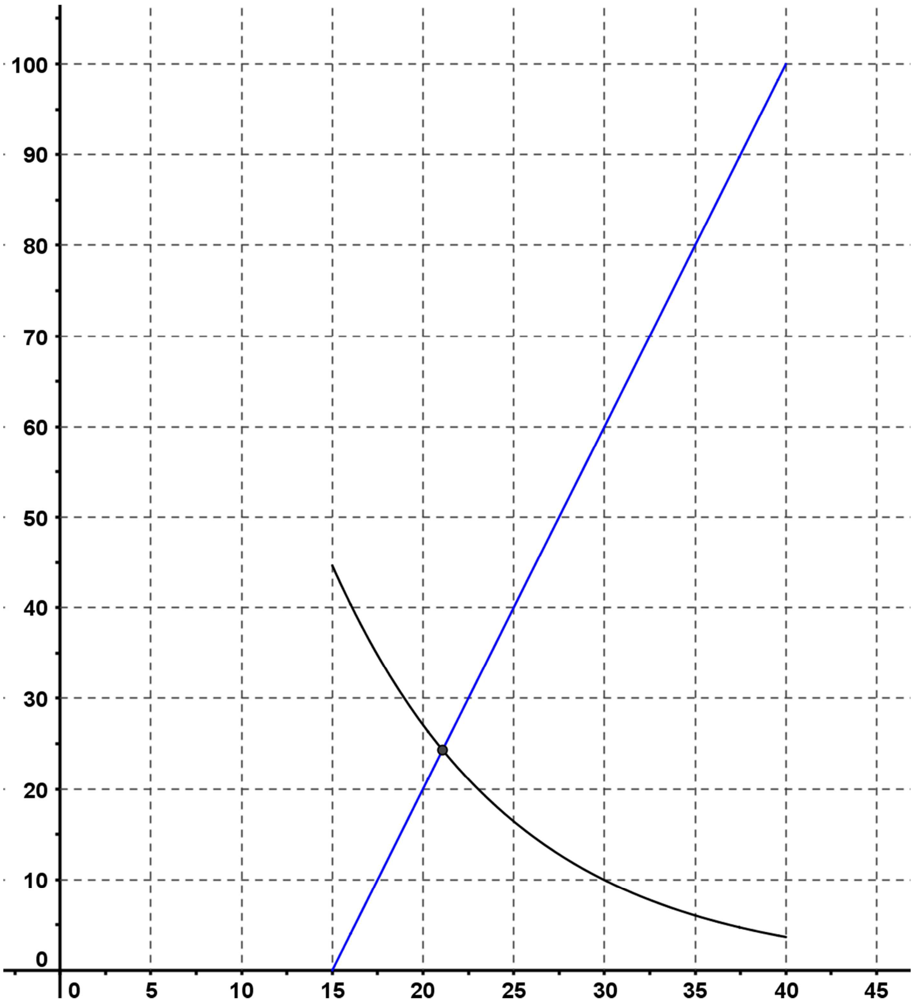
donc $-20e^{-0{,}1x} < 0$

donc $f'(x) < 0$

Tableau de variations

x	15	40
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	44,63	3,66

x	15	20	25	30	35	40
$f(x)$	44,6	27,1	16,4	10,0	6,0	2,2



1° d

x	15	31		31,10	40
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$	44,63	9,01	9	8,92	3,66

La quantité demandée est supérieure ou égale à 9000 appareils lorsque le prix unitaire est entre 15€ et 31€

2° a) $g(15) = 0$
Lorsque le prix unitaire est de 15€, la quantité offerte est nulle (l'entreprise ne veut pas vendre à ce prix !)

$g(40) = 100$
Lorsque le prix unitaire est de 40€, la quantité offerte est de 100 000 appareils.

3° d'après la table de la calculatrice, on a $f(x) = g(x)$ pour $x \approx 24$
On en déduit que le prix d'équilibre est de 24€

Quantité d'équilibre : 36 000 appareils car : $g(24) = 36$

3° b) Chiffre d'affaires à l'équilibre
$CA_{équilibre} = 36000 \times 24 = 864\ 000€$