MATHEMATIQUES

BTS1 2013-2014

Corrigés des devoirs

BTS1 23/09/2013 (1h)

Ex I : 1° a) Construire la droite D_1 passant par le point $A(-4\,;1)$, de coefficient directeur $m=-3$
On place le point A, puis à partir de A « on descend de 3 », « on se décale de 1 à droite » car $m=-3=-\frac{3}{1}$

b) Construire la droite D_2 passant par le point $B(2\,;-3)$, de coefficient directeur $m=\frac{1}{5}$
On place le point B, puis à partir de B « on monte de 1 », « on se décale de 5 à droite » car $m=\frac{1}{5}=+\frac{1}{5}$

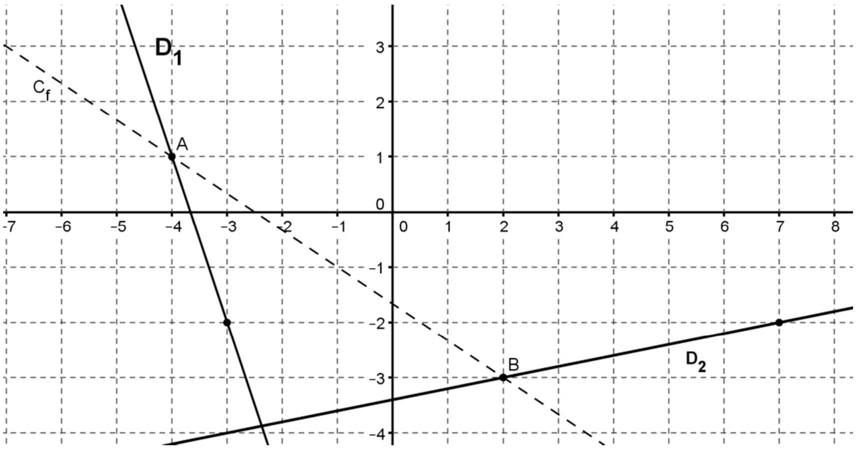
2° On considère la fonction affine f telle que $f(x)=ax+b$.
Déterminer a et b sachant que $f(-4)=1$ et $f(2)=-3$

$\star\ a=\dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\dfrac{(-3)-(1)}{2-(-4)}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}$

$\star\quad f(2)=-3 \Leftrightarrow a\times 2+b=-3 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}\times 2+b=-3 \Leftrightarrow b=-3+\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow b=\dfrac{-5}{3}$

D'où $f(x)=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

On pouvait contrôler sur le graphique : $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ est l'équation de la droite (AB)



Ex III :

1° $R(x)=-0{,}5x^2+10x$ et $x\in[0\,;17]$

a) On résout dans $[0\,;17]$:

$R(x)=18$

$\Leftrightarrow -0{,}5x^2+10x=18$

$\Leftrightarrow -0{,}5x^2+10x-18=0 \qquad \Delta=10^2-4\times(-0{,}5)\times(-18)=64=8^2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-10-8}{2(-0{,}5)}$ ou $x=\dfrac{-10+8}{2(-0{,}5)}$

$\Leftrightarrow x=18$ *ou* $x=2 \qquad 18\notin[0\,;17]$ La solution de l'équation est 2.

On a une recette de 18 millions d'euros lorsqu'on récolte 2 millions de tonnes.

2 ° a) $C(12)=12+28=40$. Pour une production de 12 millions de tonnes, les charges sont de 40 millions d'euros.

b)) On résout dans $[0\,;17]$

$C(x)=R(x)$

$\Leftrightarrow x+28=-0{,}5x^2+10x$

$\Leftrightarrow -0{,}5x^2+9x-28=0 \qquad \Delta=9^2-4\times(-0{,}5)\times(-28)=25=5^2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-9-5}{2(-0{,}5)}$ *ou* $x=\dfrac{-9+5}{2(-0{,}5)}$

$\Leftrightarrow x=14$ *ou* $x=4$

Le bénéfice est nul pour une production de 4 ou 14 millions de tonnes.

c)La représentation de C est un segment de droite d'équation $y = x + 28$. Pour le tracer : $C(2) = 30$ $C(12) = 40$
d) Graphiquement, le bénéfice est positif lorsque la recette est supérieure au coût. Graphiquement, la représentation de la fonction R est au-dessus de celle de C sur [4 ; 14], il faut produire de 4 à 14 millions de tonnes pour obtenir un bénéfice positif.

3° Etude du bénéfice.

a) $B(x) = R(x) - C(x) = (-0{,}5x^2 + 10x) - (x + 28) = -0{,}5x^2 + 9x - 28$

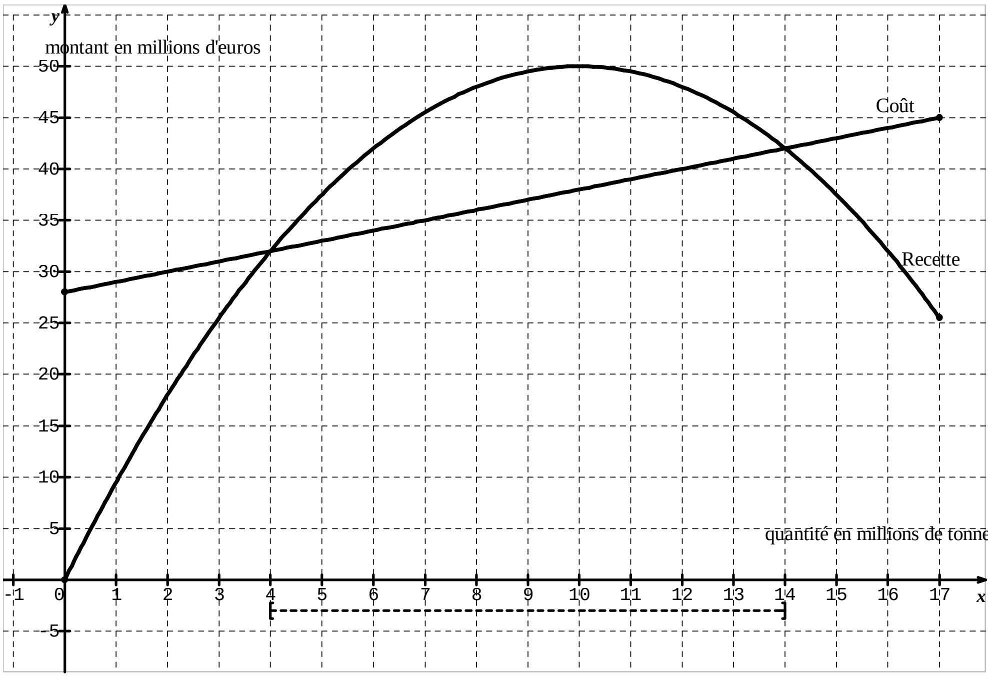
b) Variations de B

$B'(x) = -x + 9$ La racine de $B'(x)$est 9.

Tableau de variations de la fonction B:

x	0	9	17
$B'(x)$	+	0	−
$B(x)$	-28 ↗	12,5	↘ -19,5

D'après le tableau de variations de la fonction B, le bénéfice sera maximal pour une récolte de 9 millions de tonnes, et ce bénéfice maximal sera de 12,5 millions d'euros.



Ex II :

On désigne par x le nombre de jours de croisière qu'Anne réservera.

1° Exprimer les coûts $A(x)$ et $B(x)$ en euros en fonction de x, selon la formule choisie.

- Formule A : 75€ par jour de croisière.
  $A(x) = 75x$
- Formule B : un forfait de 450€, puis une réduction de 64% sur le tarif journalier.
  $$B(x) = 450 + 75 \times \left(1 - \frac{64}{100}\right) \times x = 450 + 75 \times 0{,}36x = 450 + 27x$$

☺ le tarif journalier est de 75€, si vous avez une réduction de 64% , il devient 27 €
car $75 \times \left(1 - \frac{64}{100}\right) = 75 \times (1 - 0{,}64) = 75 \times 0{,}36 = 27$

2° Déterminer à partir de combien de jours de croisière, la formule B est plus avantageuse.

On résout l'inéquation :

$$B(x) < A(x) \Leftrightarrow 450 + 27x < 75x \Leftrightarrow 450 < 48x \Leftrightarrow \frac{450}{48} < x$$

De plus $\frac{450}{48} \approx 9{,}34$, ainsi la formule avec forfait est plus avantageuse pour une croisière de 10 jours ou plus.

Remarque : calculer $A(10)$ et $B(10)$ ne suffit pas, il faudrait écrire toutes les coûts de 1 à 10 jours

Ex1 : 1° Déterminer : $f(3\,) = \ 6$; $f'(3) = -7$

L'équation de la tangente à la courbe C_f en A est : $y = f'(3) \times (x - 3) + f(3)$ ….$y = -7x + 27$

2° Déterminer : $f(4\,) = 4$; $f'(4) = \ 0$

L'équation de la tangente à la courbe C_f en S est : $y = 4$

Ex2 : Partie A : Étude du bénéfice

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation $y \ = \ 400x$.

Pour $x = 0, y = 0$ pour $x = 5\,, y = 400 \times 5 = 2000$ ce qui permet de tracer la droite

La droite d'équation $y = 400x$ est en-dessous de la courbe de la fonction Coût, ce qui signifie que pour un prix unitaire de 400€ , la recette ne peut être supérieure au coût, donc l'entreprise ne peut pas réaliser de bénéfice.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation $y \ = \ 680x$.

Pour $x = 0, y = 0$ pour $x = 5\,, y = 680 \times 5 = 3400$ ce qui permet de tracer la droite

Pour un prix de 680€, la droite d'équation $y = 680x$ est au-dessus de la courbe du coût sur l'intervalle [2,1 ; 8] , l'entreprise réalisera un bénéfice pour une production comprise entre 2,1 km et 8 km de tissu à 0,1 km près .

b. Bénéfice : Pour tout *x* de [0 ; 8] on a :

$$B(x) = 680x - C(x)$$
$$= 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$$
$$= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$$

Dérivée : Pour tout *x* de [0 ; 8] on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$

De plus :

$$-45(x-6)\left(x + \frac{2}{3}\right) = -45\left(x^2 + \frac{2}{3}x - 6x - 4\right) = -45x^2 - 30x + 270x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$$

Donc $B'(x) = -45(x-6)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

c. Étudier les variations de la fonction *B* sur [0 ; 10].

Signe de la dérivée :

$B'(x)$ a pour racines les réels $-\frac{2}{3}$ et 6 $-\frac{2}{3} \notin [0\,;8\,]$

x	0		6		8
-6		$-$		$-$	
$x + 2/3$		$+$		$+$	
$x - 6$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

d. Tableau de variations

x	0	α	6		8
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-750	0	1410		690

La fonction B est strictement croissante sur [0 ; 6] et strictement décroissante sur [6 ; 10]

Bénéfice maximum :
L'entreprise doit produire et vendre $6km$ de tissu pour réaliser un bénéfice maximal de 1410 €.

3. a. Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution dans [0 ; 6], on la note α.
La fonction B est dérivable (donc continue) et strictement croissnte sur [0 ; 6]
L'intervalle image de [0 ; 6] est $[-750 ; 1410]$
$0 \in [-750 ; 1410]$
Donc l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution dans [0 ; 6] , on la note α

b. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

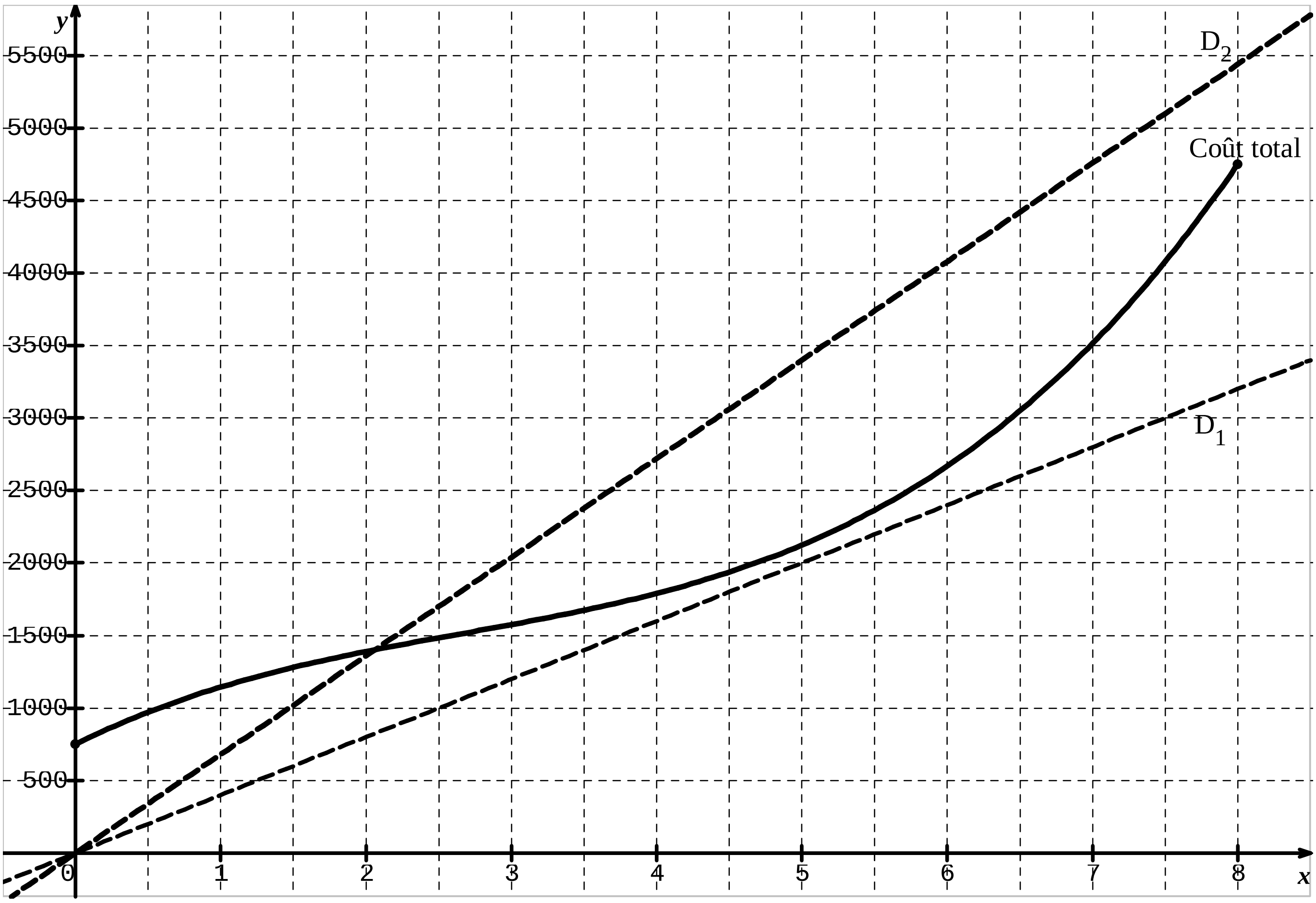
x	$B(x)$
2,0	-30
α	0
2,1	18,285

D'où $2,0 \leq \alpha \leq 2,1$ est un encadrement à 0,1 près

c. Dresser le tableau de signe de $B(x)$.
D'après le tableau de variations complété avec α

x	0		2,0	α	2,1		8
$B'(x)$		$-$		0		$+$	

d. En déduire à 0,1 km près la quantité à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice, c'est-à-dire $B(x) \geq 0$
D'après le tableau de signe de la question précédente, l'entreprise doit produire et vendre au moins 2,1 km de tissu en coton pour réaliser un bénéfice.



BTS1 DV 25/11/2013 (1h)

Ex I : On donne la courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty;3\,[\,\cup]3\,;+\infty[$.

Par lecture graphique, déterminer les limites aux bornes ouvertes de l'ensemble de définition, puis dresser le tableau de variation. Préciser les éventuelles asymptotes.

Limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$

Asymptotes : la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$; la droite d'équation $y = x - 3$ en $+\infty$; la droite d'équation $x = 3$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Ex II : Limite en $+\infty$

1° f est une fonction polynôme,

$$\lim_{x\to+\infty}(-4x^2+3x) = \lim_{x\to+\infty}(-4x^2) = -\infty \qquad car \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \ \ et -4 négatif$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2° g est une fonction rationnelle,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-0{,}5x+3}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-0{,}5x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-0{,}5}{2} = -0{,}25$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -0{,}25$

3° h est une fonction rationnelle,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

EXERCICE IV : (6 points)

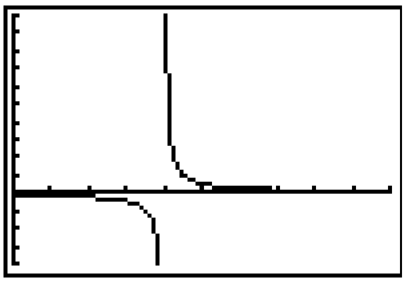
Déterminer la limite aux bornes ouvertes de l'ensemble de définition. On précisera éventuellement l'existence d'asymptote(s).

☺ *Ceux qui ont du mal à calculer : lisez les limites sur l'écran*

$f(x) = \dfrac{1}{2x-8} \qquad D =]4\,;+\infty[$

Limite en 4 :

$\lim\limits_{x\to4}(2x-8) = 0 \ \ et \qquad donc \lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{1}{2x-8} = +\infty$



Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à C_f

Limite en $+\infty$:

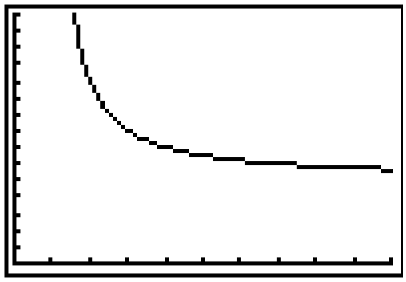
$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-8) = +\infty \ \ donc \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x-8} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

$g(x) = \dfrac{5x+1}{x-1}$ $\qquad D =]1\,;+\infty[$

Limite en 1 $\quad \boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x-1} \times (5x+1)}$

⋆ $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0 \quad et$ $\qquad donc \ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$



⋆ $\lim\limits_{x\to 1}(5x+1) = 6$

$donc \ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-1}} \times (\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}) = +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C_g

Limite $+\infty$ $\quad g$ étant une fonction rationnelle

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$ et la droite d'équation $y = 5$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

<u>EXERCICE III : (5points)</u>

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	2		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	4

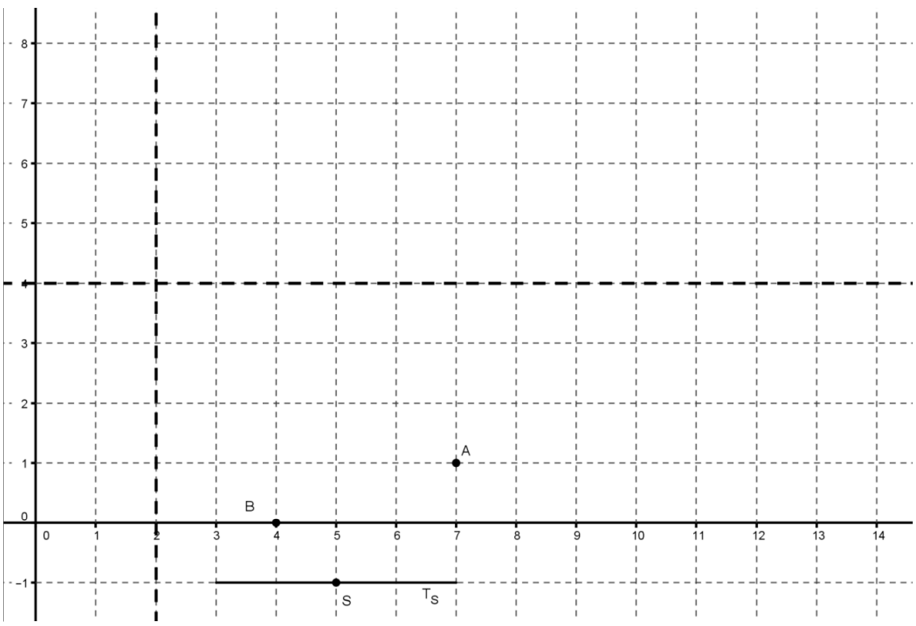
1° Lire $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

2° On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

a) Asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$: la droite d'équation $y = 4$ en $+\infty$; la droite d'équation $x = 2$

b) Tracer une courbe $\mathscr{C}$ possible en mettant en évidence les éléments connus

$A(7\,;1)$ et $B(4;0)$ sont des points de $\mathscr{C}$; $S(5\,;-1)$ est le sommet de $\mathscr{C}$



BTS Blanc MATHEMATIQUES	BTS1	2 HEURES	13/12/2013

EXERCICE I : (5 points) 1° : 1,5 2° 1,5 3° : 1 4° : 1

On considère une fonction f définie sur $]-\infty; 1[\cup]1\,; +\infty[$, dont on donne le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

1° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

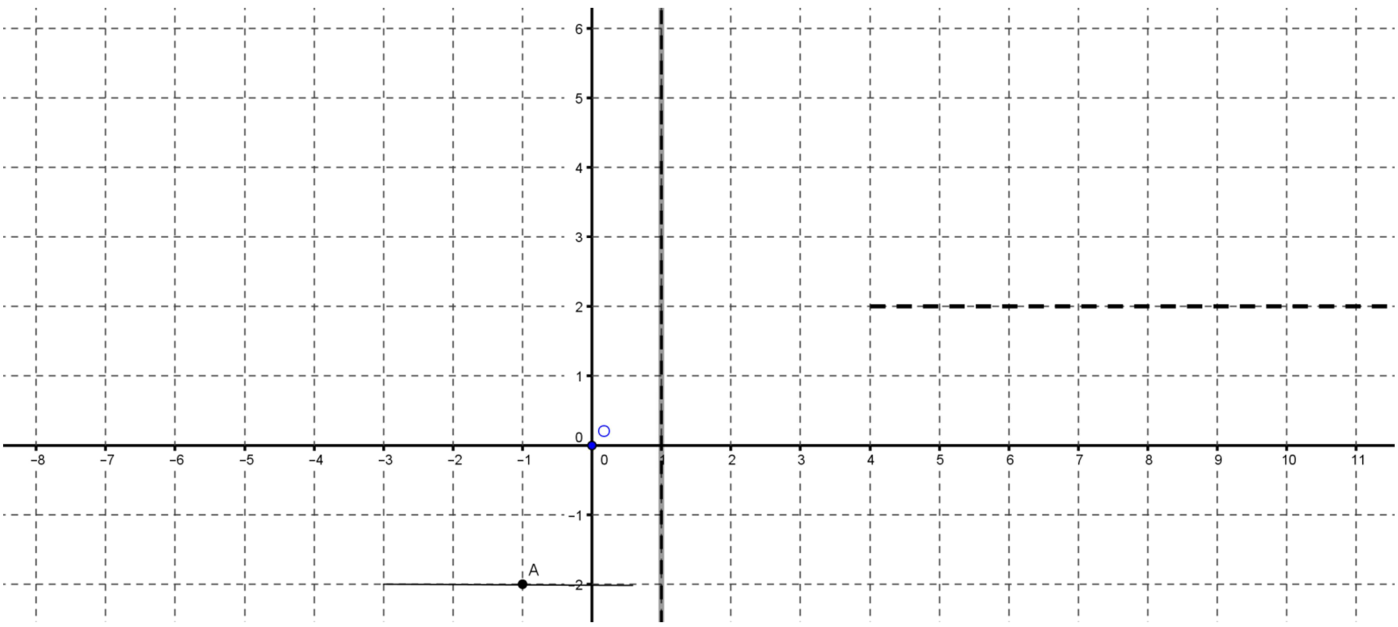
2° La courbe admet trois asymptotes :

la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$; la droite d'équation $y = 2$ en $+\infty$; la droite d'équation $x = 1$

3° Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est 0, de plus le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé.

$f'(x) = 0$ pour $x = -1$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en $A(-1\,;\,-2)$ et l'équation de cette tangente est $y = -2$



EXERCICE II : (8 points) A : 1.5 B 1° : 3 2° : 1 3° : 2,5

Partie A : Lecture graphique

1° Le volume hebdomadaire est donc égal à 400 euros pour environ 4,1 litres et 15,2 litres de vaccins produits

2° Le laboratoire est donc bénéficiaire entre 1 litre et 16,3 litres de vaccin.

Partie B : Étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que *B* est la fonction définie pour tout *x* de $[0\,;\,17]$ par : $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 180x - 184$.

1° a) Dérivée :

Pour tout nombre réel *x* de l'intervalle $[0\,;\,17]$

$$B'(x) = -3x^2 + 12x + 180$$

1° b) Pour tout *x* appartenant à l'intervalle $[0\,;\,17]$,

$$(-3x + 30)(x + 6) = -3x^2 - 18x + 30x + 180 = -3x^2 + 12x + 180$$

On retrouve $B'(x)$ trouvé en a)

Ainsi, pour tout *x* de $[0\,;\,17]$, $B'(x) = (-3x + 30)(x + 6)$.

1° c) Étudier le signe de $B'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 17]$.

Racines $-3x + 30 = 0 \Leftrightarrow -3x = -30 \Leftrightarrow x = 10$

$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ cette racine n'appartient pas à l'intervalle $[0\ ;\ 17]$

Tableau de signe

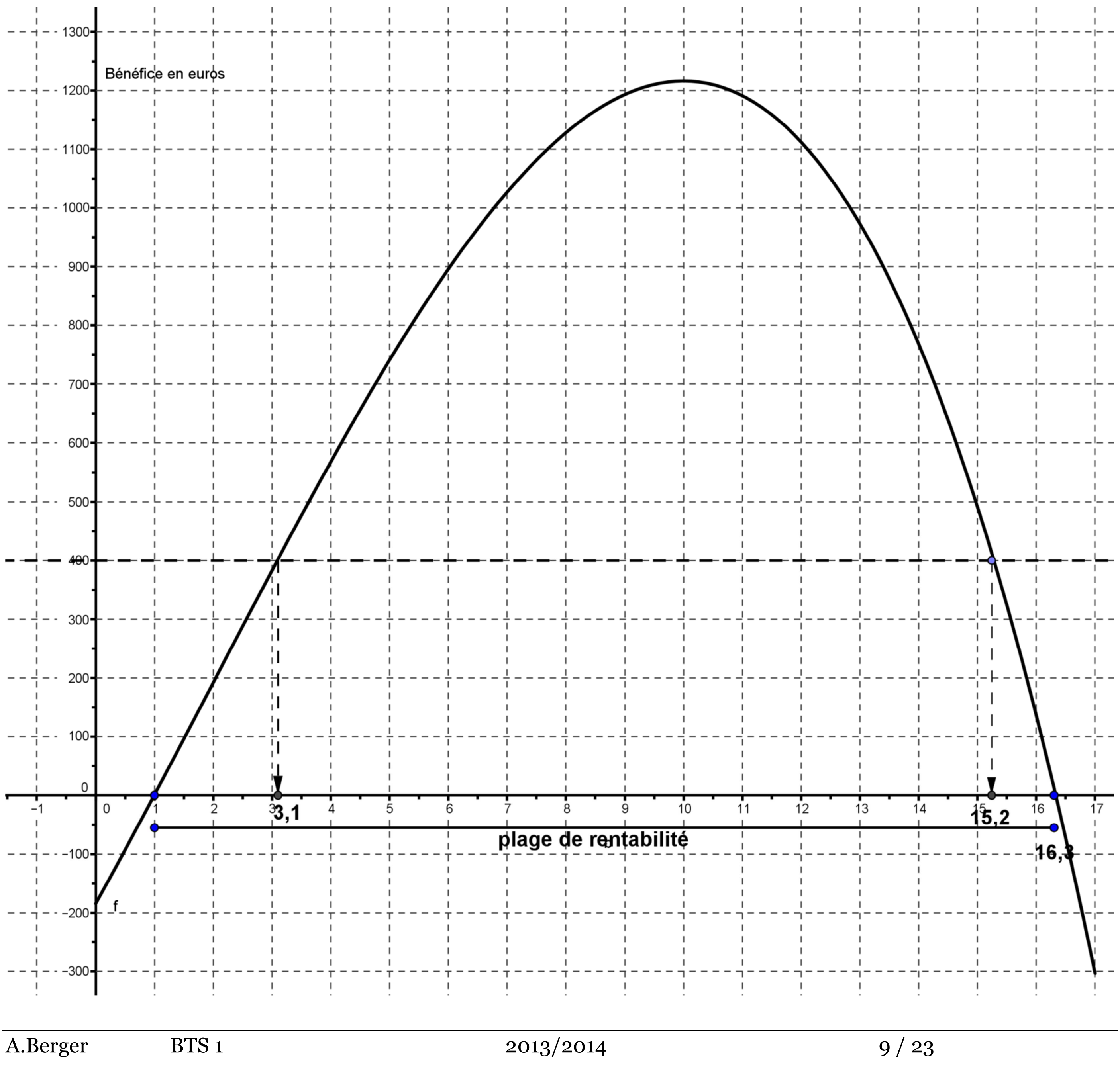
x	0		10		17
$-3x + 30$		+	0	$-$	
$x + 6$		$+$		$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

1° d) Tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\ ;\ 17]$.

x	0	β		10		α	17
$B'(x)$			+	0	$-$		
$B(x)$	-184	0	↗	1216	↘	0	-303

2° D'après le tableau de variation la fonction B a pour maximum 1216 atteint en $x = 10$.

Donc il faut produire 10 litres de vaccin pour que le bénéfice soit maximal, et ce bénéfice sera de 1216€



3° a) La fonction B est dérivable (donc continue) et strictement décroissante sur [10 ; 17]
L'intervalle image de [10 ; 17] est $[-303\,;1216]$
$0 \in [-303\,;1216]$
Donc l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution dans [10 ; 17] , on la note α

b. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

x	$B(x)$
16,3 α 16,4	$+13{,}39$ 0 $-29{,}18$

D'où $16{,}3 \leq \alpha \leq 16{,}4$ est un encadrement à 0,1 près

c. Dresser le tableau de signe de $B(x)$.
D'après le graphique, B semble s'annuler en 1.
Vérifions : $B(1) = 1 \qquad B(0{,}9) \approx -17$

D'après le tableau de variations complété avec α et β

x	0	0,9	β	1		16,3	α	16,4		17
$B(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$	

D'après le tableau de signe de la question précédente, l'entreprise doit produire et vendre de 1 à 16,3 litres de vaccin pour réaliser un bénéfice.

EXERCICE III : (points)

Une entreprise spécialisée produit du détergent, l'entreprise est en situation de monopole.
Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par : $f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}$ où $x > 0$.
Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en tonnes. Sur la page annexe, on a tracé la courbe représentative de la fonction f , notée *C*.

1. a. Pour $x \in]0\,;+\infty[$

$$f'(x) = 0{,}5 + 8 \times \frac{-1}{x^2} = 0{,}5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0{,}5x^2 - 8}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{2x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$$

1. b. Signe de $f'(x)$

x	0		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$+$		$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$-4 \notin]0\,;+\infty[$

2. a. limite en 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 0{,}5x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{8}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad donc \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

2. b. limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 0{,}5x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad donc \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{8}{x} = 0 \;\; donc \lim_{x\to +\infty} (f(x) - 0{,}5x) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0{,}5x$ est asymptote à C_f en $+\infty$

Pour tracer D : pour $x = 0 \quad y = 0{,}5 \times 0 = 0 \qquad$ pour $x = 8 \quad y = 0{,}5 \times 8 = 4$

3. Tableau de variation de la fonction f

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

4 .a. $p(0) = -1.5 \times 0 + 17 = 17 \qquad p(10) = -1.5 \times 10 + 17 = 2$

Ce qui permet de tracer la droite P

Production non déficitaire : de 0,5 tonne à 8 tonnes (la droite est au-dessus de la courbe du coût)

4.b. On veut $f(x) \leq p(x)$

$$f(x) \leq p(x) \Leftrightarrow \ 0.5x + \frac{8}{x} \leq -1{,}5x + 17 \Leftrightarrow 2x - 17 + \frac{8}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 17x + 8}{x} \leq 0$$

Signe de $2x^2 - 17x + 8$: $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 225 = 15^2 > 0$

Ce polynôme a deux racines : $x_1 = \frac{17-15}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{17+15}{4} = 8$

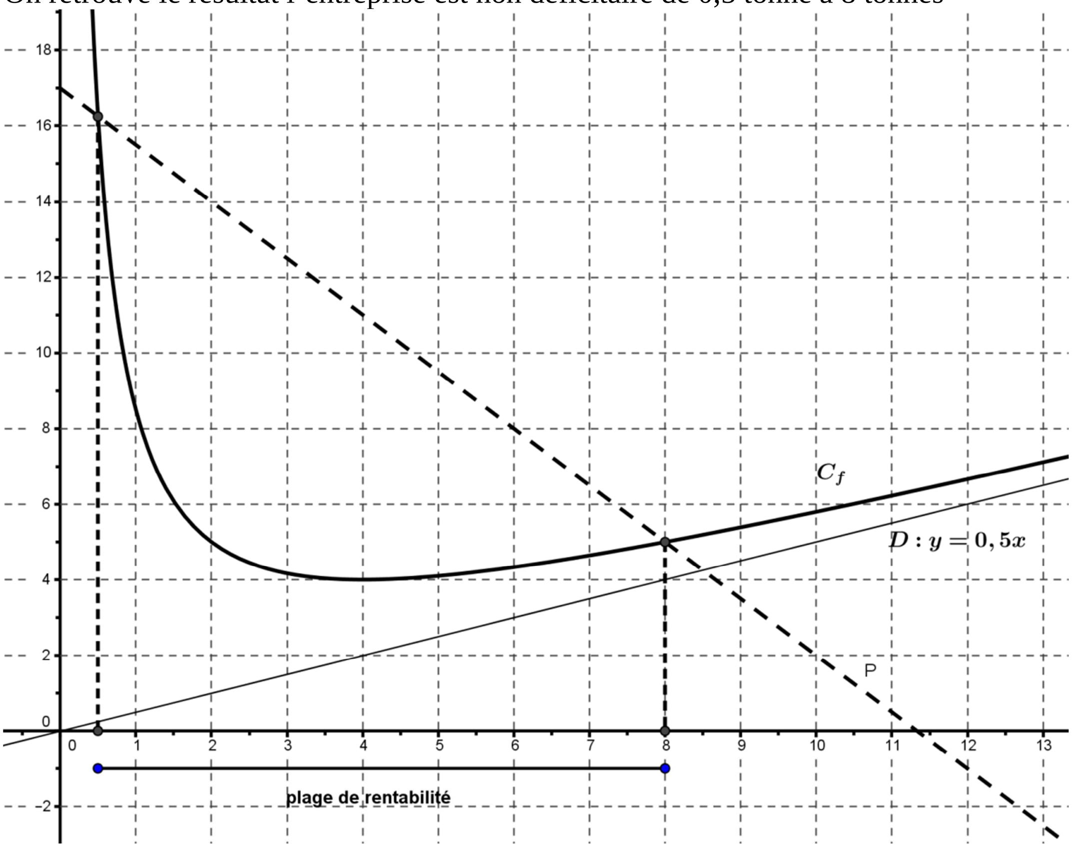
$a = 2 > 0$ (positif à l'extérieur des racines)

D'où le signe du quotient :

x	0		½		8		$+\infty$
$2x^2 - 17x + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	0	$+$				$+$	
$\frac{(2x-1)(x-8)}{x}$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit : $f(x) \leq p(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2} ; 8\right]$

On retrouve le résultat l'entreprise est non déficitaire de 0,5 tonne à 8 tonnes



Pour tracer D : pour $x = 0 \quad y = 0{,}5 \times 0 = 0 \qquad$ pour $x = 8 \quad y = 0{,}5 \times 8 = 4$

Pour tracer P : $p(0) = -1.5 + 17 = 17 \qquad p(10) = -1.5 \times 10 + 17 = 2$

BTS1 CC 07/01/2014 1h

EXERCICE I : (8 points)

1° Ecrire en fonction de $ln2$ et/ou $ln5$

$\ln 4 = \ln(2\times 2) = \ln 2 + \ln 2 = 2\ln 2$

$\ln 20 = \ln(2\times 2\times 5) = \cdots = 2\ln 2 + ln5$

$\ln\dfrac{25}{2} = \ln 25 - \ln 2 = \ln(5\times 5) - \ln 2 = \cdots = 2\ln 5 - \ln 2$

$\ln\dfrac{1}{5} = \ln 1 - \ln 5 = 0 - \ln 5 = -\ln 5$

2° Pour tout x de $]0\,;+\infty[$

☺ $n = \ln e^n\ ,\quad 1 = \ln e^1\ ,\quad 3 = \ln e^3$

$1 - lnx = 0$

$\Leftrightarrow \ln e^1 = \ln x$

$\Leftrightarrow x = e^1$ la solution est e

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$

$-3 + lnx > 0$

$\Leftrightarrow lnx > 3$

$\Leftrightarrow lnx > lne^3$

$\Leftrightarrow x > e^3 \quad S =]e^3;\ +\infty[$

3° $1{,}03^n \geq 1{,}4$

$\Leftrightarrow ln(1{,}03^n) \geq ln1{,}4$

$\Leftrightarrow n\ ln1{,}03 \geq ln\ 1{,}4$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{ln1{,}4}{ln1{,}03}$

De plus $\frac{ln1{,}4}{ln1{,}03} \approx 11{,}38$

Le plus petit entier est 12

4° On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$f(x) = 3x + 1 + 2\ln x$

limite en 0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(3x+1) = 1\\ \lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty\end{array}\right\} donc\ \lim_{x\to 0}(3x + 1 + 2lnx) = -\infty$$

Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+1) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty\end{array}\right\} donc\ \lim_{x\to +\infty}(3x + 1 + 2lnx) = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

EXERCICE II : (12 points)

Partie A La courbe (C), donnée ci-contre, est la représentation graphique de la fonction f définie sur [1 ; 7] par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$

1° Dérivée : pour tout x de [1 ; 7]

$f'(x) = -2x + 10 - 8\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$

De plus : $-2(x-1)(x-4) = -2(x^2 - x - 4x + 4) = -2x^2 + 10x - 8$

Donc $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$

2° Signe de la dérivée

x	1		4		7	Racines :
-2		$-$		$-$		
$x-1$	0	$+$		$+$		1
$x-4$		$-$	0	$+$		4
x		$+$		$+$		0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$		

3° Tableau de variation de la fonction f

x	1		4		7
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	$f(7)$

Images : $f(1) = -1^2 + 10 - 9 - 8\ln 1 = 0$

$f(4) = -4^2 + 10 \times 4 - 9 + 8ln4 = 15 - 8\ln 4 \approx 3{,}9096$

$f(7) = -7^2 + 10 \times 7 - 9 - 8\ ln7 = 12 - 8\ln 7 \approx -3{,}567$

4° a) La fonction f est dérivable (donc continue) et strictement décroissante sur $[4\,;7]$
L'intervalle image de $[4\,;7]$ est $[f(7); f(4)]$
$0 \in [f(7)\,; f(4)]$
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[4\,;7]$, on la note α

4° b) Table de valeurs arrondi à 10^{-4}

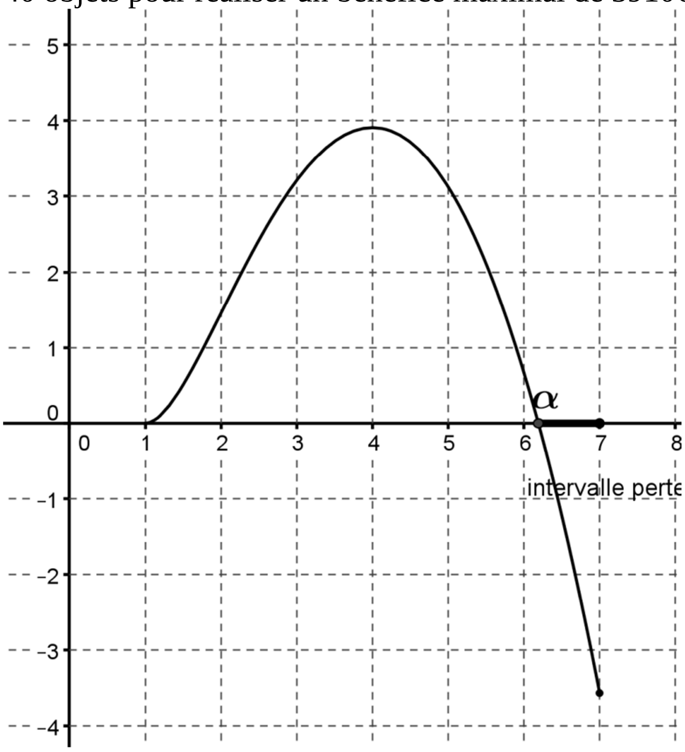
x	6,18	6,19	6,20	6,21
$f(x)$	0,0371	0,0004	−0,0364	−0,0734

4° c) on en déduit : $6{,}19 \leq \alpha \leq 6{,}20$

Partie B - Application économique

Une entreprise doit produire entre 10 et 70 pièces par jour.
On admet que si x est la production journalière en dizaines de pièces alors le bénéfice réalisé en milliers d'euros est $f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la première partie avec $x \in [1\,;7]$.
1° D'après la courbe : $f(x) < 0$ pour $x > \alpha$; or $6{,}19 \leq \alpha \leq 6{,}20$, comme x est en dizaines de pièces, on en déduit que c'est à partir de 62 pièces que l'entreprise travaille à perte.

2° le maximum de la fonction f sur $[1\,;7]$ est $f(4) \approx 3{,}9096$, ainsi, l'entreprise doit fabriquer et vendre 40 objets pour réaliser un bénéfice maximal de 3910€ à 1€ près.



<u>BTS1 04/02/2014 1h</u>

<u>EXERCICE I : (5 points)</u>

Déterminer le signe des expressions suivantes sur ℝ. On donnera le tableau de signes.

$A(x) = 3e^{x} + 0{,}15$ $\quad$ $B(x) = -3e^{5x} - 4$ $\quad$ $C(x) = 0{,}5 - 2e^{x}$ $\quad$ $D(x) = e^{-x+3} - 1$

On a $e^{X} > 0$ sur ℝ, ce qui permet de donner directement le signe de $A(x)$ et $B(x)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$A(x)$	$+$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$B(x)$	$-$

Pour $C(x)$: $C(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5 - 2e^{x} = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 0{,}25 \Leftrightarrow x = \ln(0{,}25)$

$C(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}5 - 2e^{x} > 0 \Leftrightarrow e^{x} < 0{,}25 \Leftrightarrow x < \ln(0{,}25)$

Pour $D(x)$: $D(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} = 1 \Leftrightarrow e^{-x+3} = e^{0} \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x+3} > 1 \Leftrightarrow -x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 3$

x	$-\infty$		$\ln(0{,}25)$		$+\infty$
$C(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	

<u>EXERCICE II : (15 points)</u> *d'après BTS CGO Novembre 2013*

A. Étude d'une fonction f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 9 - 6e^{-0{,}2t}$

1. Limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(t) = 9 - 6e^{-0{,}2t}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}2t} = 0$ (donnée) donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 6e^{-0{,}2t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 9 - 6e^{-0{,}2t} = 9$ ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 9$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 9$ est asymptote à C_f en $+\infty$

Construction : la droite *D* d'équation $y = 9$ est parallèle à l'axe des abscisses.

2. a. Dérivée de la fonction f.

Pour $t \in [0\,;+\infty[$

$f'(t) = 0 - 6 \times (-0{,}2e^{-0{,}2t}) = 1{,}2\, e^{-0{,}2t}$

b. Signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On sait : $e^{X} > 0$ sur ℝ

pour $t \in [0\,;+\infty[$: $e^{-0{,}2t} > 0$ donc $1{,}2e^{-0{,}2t} > 0$ donc $f'(t) > 0$

ou tableau de signe

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$1{,}2$	$+$
$e^{-0{,}2t}$	$+$
$f'(t)$	$+$

$e^{X} > 0$ sur ℝ

3. Tableau de variation de *f* sur $[0\,;\,+\infty[$. On complètera ce tableau avec des valeurs exactes.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$		9
	3	

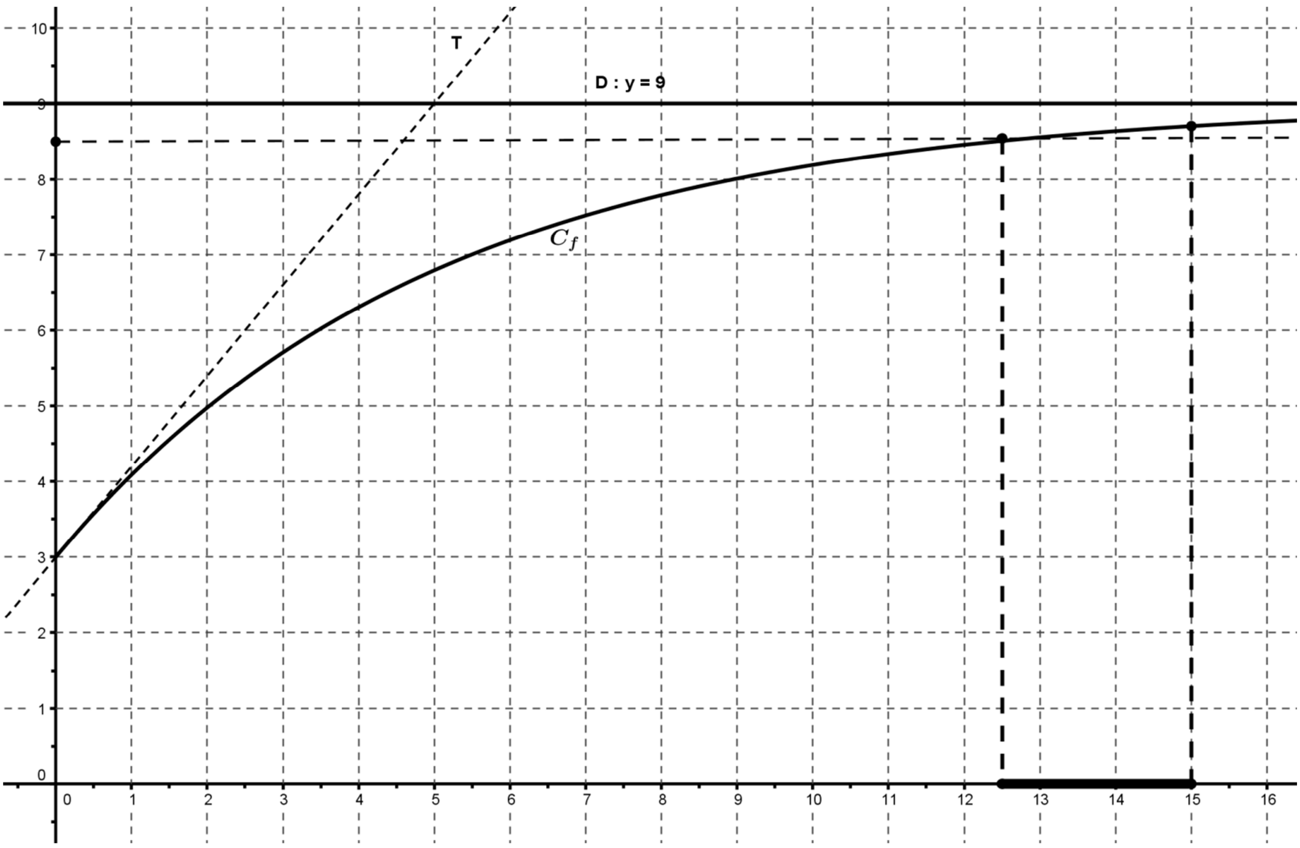
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente.
$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) \quad avec\ f'(0) = 1{,}2e^0 = 1{,}2 \quad f(0) = 3$
$y = 1{,}2x + 3$
Ainsi la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1{,}2x + 3$
Pour $x = 5$: $y = 1{,}2 \times 5 + 3 = 9$
Tracé : cette tangente passe par l'origine $O(0\,;0)$ et par le point de coordonnées $(5\,;9)$.

5. Résoudre graphiquement dans $[0; 15]$ l'inéquation $f(t) \geq 8{,}5$.
L'ensemble de solutions de l'inéquation est : $S = [12{,}4\ ; 15]$
On fait apparaître les constructions utiles.
6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par : $F(t) = 9t + 30e^{-0{,}2t}$
Pour tout réel t de $[0\,;\ +\infty[$:
$F'(t) = 9 + 30 \times (-0{,}2e^{-0{,}2t}) = 9 - 6e^{-0{,}2t} = f(t)$

B. Application
Dans une entreprise, on admet que pour une production journalière de n **dizaines** d'articles, lorsque $0 \leq n \leq 15$, la marge unitaire sur coût de production, en euros, est donnée par $f(n)$ où f est la fonction définie dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie A., répondre aux questions suivantes :

1. Pour 50 articles, c'est-à-dire pour **5 dizaines** d'articles :
$f(5) = 9 - 6e^{-0{,}2\times 5} = 9 - 6e^{-1} \approx 6{,}79$
Pour 50 articles, la marge unitaire est de 6,79 € à 1 centime près.

2. Graphiquement, dans $[0; 15]$ l'inéquation $f(t) \geq 8{,}5$ a pour ensemble de solutions $S = [12{,}4; 15]$
On peut affiner la lecture graphique :
$f(12{,}4) \approx 8{,}4975 < 8{,}50 \qquad f(12{,}5) \approx 8{,}5075 > 8{,}50$
De plus on produit un nombre entier d'objets.
On en déduit que la marge unitaire sur coût de production est supérieure ou égale à 8,50 euros pour une production de 12,5 à 15 dizaines d'articles, c'est-à-dire de 125 à150 articles .



BTS Blanc 25/02/2014 (2heures)

EXERCICE I : (6.5 points) *A : 1° : 2.25 2° : 2* *B : 2.25*

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [6 ; 30] par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 36\ln x + 150$.

1. a. Pour tout nombre réel x de $[6\ ;\ 30]$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 36 \times \frac{1}{x} = x - \frac{36}{x} = \frac{x^2 - 36}{x} = \frac{(x-6)(x+6)}{x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans [6 ; 30].2° Signe de la dérivée

x	6		30
$x-6$	0	+	
$x+6$		+	
x		+	
$f'(x)$	0	+	

Racines :
6
-6
0

c. Tableau de variation de la fonction *f*

x	6		30
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	103	↗	478

Images : $f(6) = \frac{1}{2} \times 6^2 - 36\ln 6 + 150 = 168 - 36\ln 6 \approx 103{,}5$

$f(30) = \frac{1}{2} \times 30^2 - 36\ln 30 + 150 = 600 - 36\ln 30 \approx 477{,}6$

2. a. Tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à l'unité.

x	6	10	15	20	25	30
$f(x)$	103	117	165	242	347	478

B. Application économique

Coût total de production pour *x* articles produits, avec $6 \leq x \leq 30$ est $f(x)$ euros,

1. Chaque article fabriqué est vendu 22,50 euros.

La recette $r\ (x)$, en euros, pour *x* articles vendus est $r(x) = 22{,}5x$

2. Bénéfice en euros pour 20 articles fabriqués et vendus.

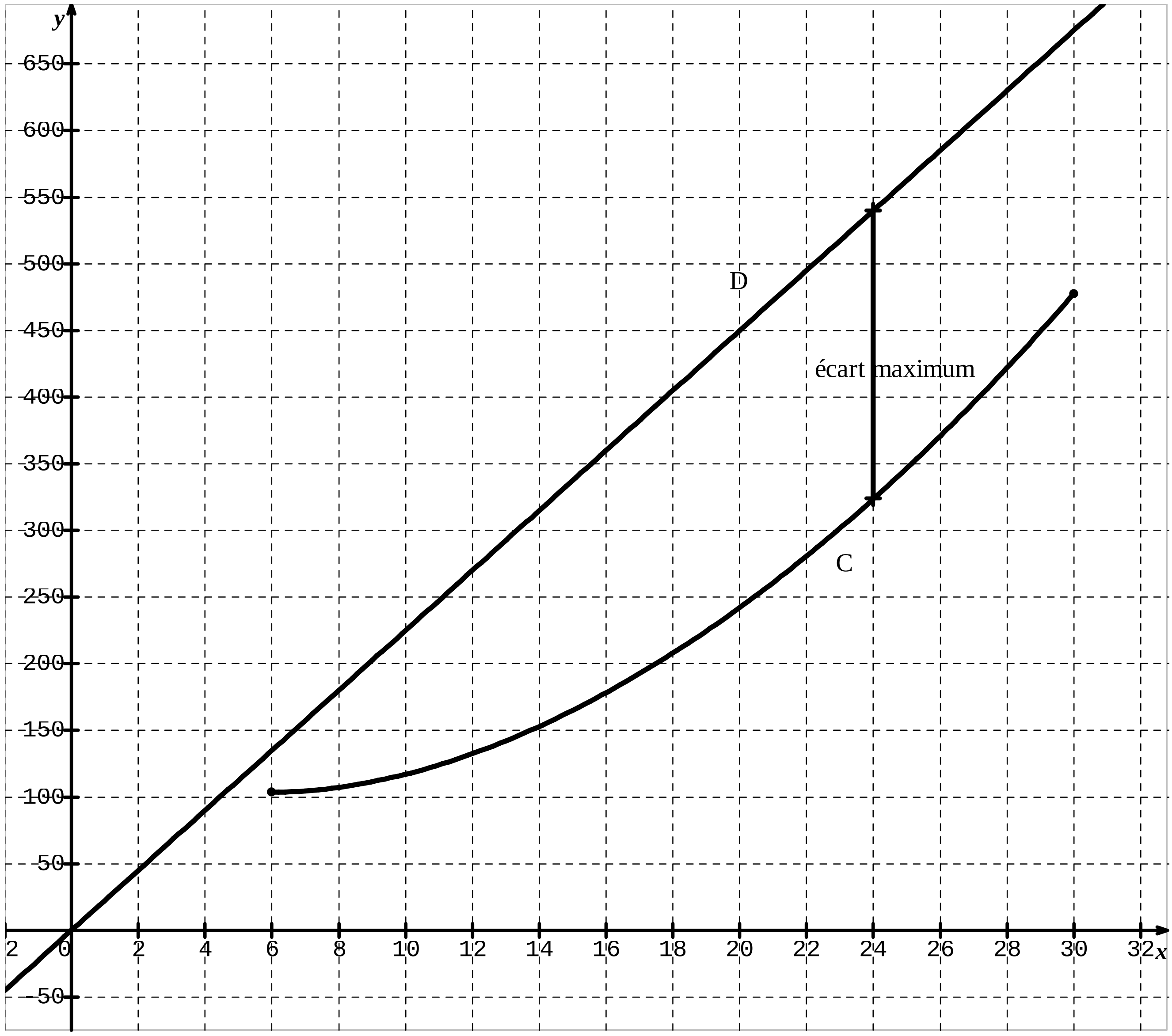
$r(20) - f(20) \approx 208$

Le bénéfice sera de 208€

3. Expliquer pourquoi ce prix de vente permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice, quelle que soit sa production.

Pour $x \in [6\,;30\,]$, la droite d'équation $y = 22{,}5x$ représentant la recette pour x articles vendus est toujours au-dessus de la courbe de la fonction f représentant le coût total pour x articles vendus, donc l'entreprise sera bénéficiaire quelle que soit le nombre d'articles vendus

4. Graphiquement, le bénéfice est maximal pour 24 articles. On regarde l'écart maximum entre la courbe des couts et la droite de la recette.



EXERCICE II : (5,5 points) ***A 1° : 1.5 2° : 2 3° : 0,75 B : 1.25*** *d'après Polynésie 2009*

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [0 ; $+\infty$[par $f(x) = 3{,}87e^{-0{,}26x} + 0{,}75$

1. a. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}26x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}26x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3{,}87e^{-0{,}26x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3{,}87e^{-0{,}26x} + 0{,}75) = 0{,}75$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0{,}75$

1. b. On en déduit que la droite Δ d'équation $y = 0{,}75$ est asymptote à la courbe C.

2. a. Dérivée :

Pour x de [0 ; $+\infty$[:

$f'(x) = 3{,}87 \times (-0{,}26e^{-0{,}26x}) + 0 = -1{,}0062e^{-0{,}26x}$

2. b. Étudier le signe de $f\,'(x)$ pour tout nombre réel *x* de [0 ; $+\infty$[

On sait : $e^X > 0$ sur $\mathbb{R}$

x	0 $+\infty$
$-1{,}0062$ $e^{-0.26x}$	$-$ $+$
$f'(x)$	$-$

2. c. Tableau de variation de la fonction *f*

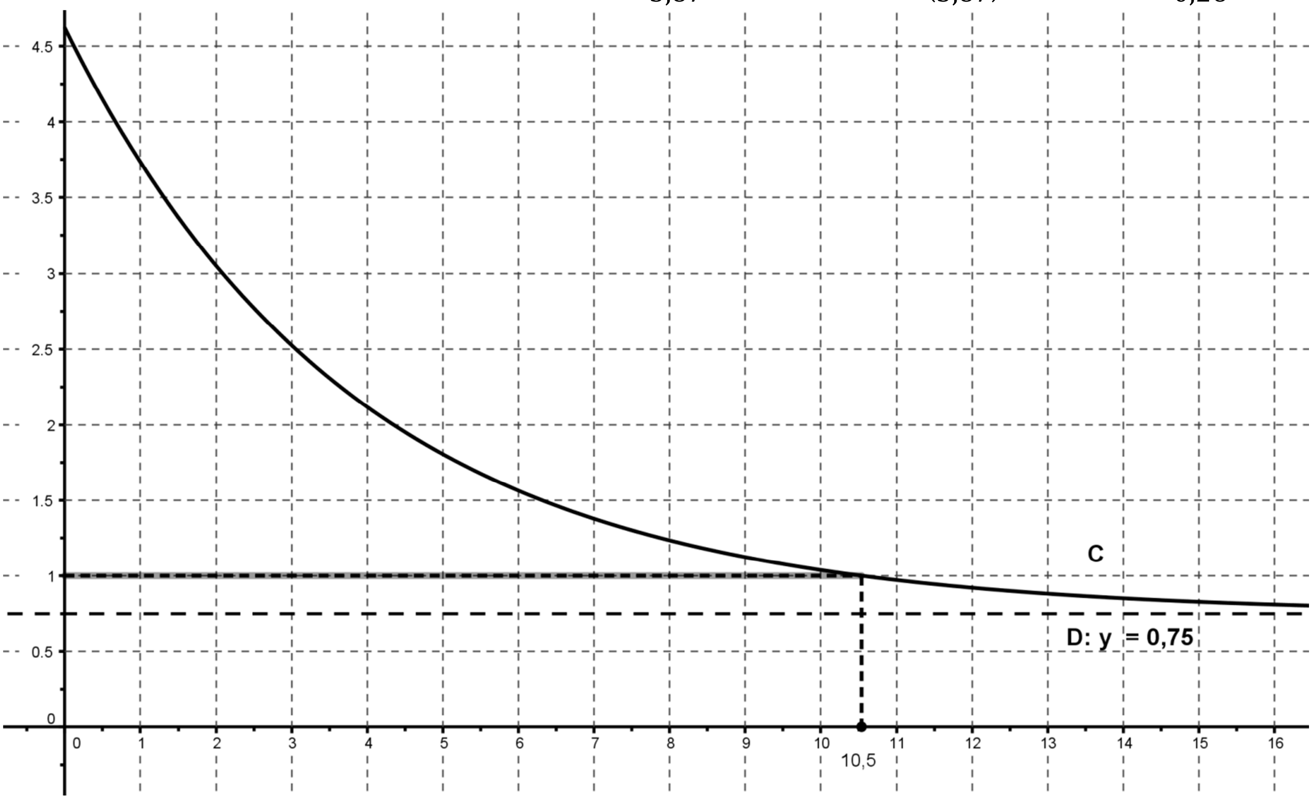
x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	4,62 $\searrow$ 0,75

Images : $f(0) = 3{,}87 \times e^{-0{,}26\times 0} + 0{,}76 = 3{,}97 \times 1 + 0{,}75 = 4{,}12$

3. Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 1$ est $10{,}5$

<u>Non demandé</u> *: Par le calcul : La valeur exacte de la solution est* $-\frac{\ln\left(\frac{0{,}25}{3{,}87}\right)}{0{,}26} \approx 10{,}54$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 3{,}87e^{-0{,}26x} + 0{,}75 = 1 \Leftrightarrow e^{-0{,}26x} = \frac{0{,}25}{3{,}87} \Leftrightarrow -0{,}26x = \ln\left(\frac{0{,}25}{3{,}87}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{0{,}25}{3{,}87}\right)}{0{,}26}$$



B. Application

1° La solution de l'équation $f(x) = 1$ est environ 10,5

Donc la consommation est de 1kg par personne dans une exploitation où vivent 11 personnes

2° Consommation par personne dans une exploitation de 12 personnes : $f(12)$

$12 \times f(12) \approx 11{,}05$

Dans une exploitation de 12 personnes, on aura une consommation totale de 11kg

<u>EXERCICE III : (points)</u> *A : 4,5 B : 3,5*

En 2001, sa quantité de rejets était de 49 000 tonnes. Elle est passée à 68 000 tonnes en 2004. Le groupe pour être aux normes ne doit pas dépasser 42 000 tonnes de rejets par an.

<u>Partie A</u> *: on fait l'hypothèse que le groupe ne prend aucune mesure pour faire diminuer ses rejets.*

On appelle u_1 l'amende payée en 2001 et u_n l'amende payée en $2000 + n$. On a alors $u_1 = 83\,000$.

1° Valeur de l'amende payée par le groupe

en 2002 : $83\,000 + 6000 = 89\,000$€ puis en 2003 : $89000 + 6000 = 95\,000$€

2° L'amende à payer augmente de 6000€ tous les ans

$$u_{n+1} = u_n + 6000$$

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 6000$ et de 1er terme $u_1 = 83000$

3° La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 6000$ et de 1er terme $u_1 = 83000$

Donc $u_n = u_1 + (n-1) \times 6000 = 83000 + (n-1) \times 6000$

4° $u_{15} = 83000 + 14 \times 6000 = 167000$

L'amende que devra payer le groupe en 2015 sera de 167000€

5° Le montant total des amendes de 2001 à 2015 est de 1 875 000€. En effet :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{15} = \frac{15}{2}(u_1 + u_{15}) = \frac{15}{2} \times (83000 + 167000) = 1\,875\,000$$

6° Feuille de calcul pour observer l'évolution

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Ensemble des amendes depuis 2001
2	2001	1	83000	83000
3	=A2+1	=B2+1	=C2+6000	=D2+C3 ou =C2+C3
4				

Partie B : Au vu des résultats précédents, le groupe a décidé en 2004 de mettre en place un dispositif lui permettant de se mettre aux normes progressivement, l'objectif étant de ramener sa quantité de rejets à une valeur inférieure ou égale à 42 000 tonnes en 2014.

Le groupe s'est engagé à réduire sa quantité de rejets de 4% chaque année, à partir de 2004.

1° En 2004 : 68 000 tonnes. Engagement : -4% par an.

$$68\,000 \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 68\,000 \times 0{,}96 = 65\,280$$

$66000 > 65280$, si le groupe a rejeté 66 000 tonnes en 2005, il n'a pas respecté son engagement.

2° On appelle c_n la quantité de rejets en $2004 + n$. Ainsi $c_0 = 68000$

a) Le groupe s'est engagé à réduire sa quantité de rejets de 4% chaque année,

$$c_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{100}\right) c_n = 0{,}96\, c_n$$

On en déduit que la suite (c_n) est géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de 1er terme $c_1 = 68000$

b) $c_n = c_0 \times 0{,}96^n = 68\,000 \times 0{,}96^n$

3° Calculer, à 1 tonne près, la quantité de rejets en 2014, année de rang 10 ($2014 = 2004 + 10$)

$c_{10} = 68\,000 \times 0{,}96^{10} \approx 45209$

Avec des rejets de 45 209 tonnes en 2014, l'entreprise n'aura pas atteint son objectif de 42000 tonnes maximum de rejets

4° On résout l'inéquation

$c_n \leq 42000$

$68000 \times 0{,}96^n \leq 42000$

$0{,}96^n \leq \dfrac{42000}{68000}$

$\ln 0{,}96^n \leq \ln \dfrac{42}{68}$

$n \times \ln 0{,}96 \leq \ln \dfrac{42}{68}$

$n \geq \dfrac{\ln \frac{42}{68}}{\ln 0{,}96} \quad or \quad \dfrac{\ln \frac{42}{68}}{\ln 0{,}96} \approx 11{,}78$

Le plus petit entier solution est 12

Interprétation : c'est à partir de l'année de rang 12, en 2016 que la quantité de rejets sera inférieure ou égale à 42000 tonnes.

BTS1 08/04/2014   1H

EXERCICE I : (10 points)

1° $\int_1^3 (3x^2-2x+1)dx = \left[3\times\frac{1}{3}x^3-2\times\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^3 = [x^3-x^2+x]_1^3 = (3^3-3^2+3)-(1^3-1^2+1) = 20$

2° $\int_1^3 \frac{2}{x}dx = \int_1^3 2\times\frac{1}{x}dx = [2\times\ln x]_1^3 = 2\ln 3 - 2\ln 1 = 2\ln 3 \approx 2{,}20$

3° $\int_0^2 3e^x dx = [3e^x]_0^2 = (3e^2)-(3e^0) = 3e^2-3 \approx 19{,}17$

4° $\int_{-2}^2 e^{-0{,}5x}dx = \left[\frac{1}{-0{,}5}e^{-0{,}5x}\right]_{-2}^2 = [-2\,e^{-0{,}5x}]_{-2}^2 = (-2e^{-1})-(-2e^1) = 2e-2e^{-1} \approx 4{,}70$

5° $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(2xe^{x^2})dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^1\right)-\left(\frac{1}{2}e^0\right) = \frac{1}{2}e-\frac{1}{2} \approx 0{,}86$

Lorsque vous obtenez l'intégrale à la calculatrice, dites-le !

6° $\int_1^4 \frac{2}{2x-1}dx = [\ln(2x-1)]_1^4 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7 \approx 1{,}95$

7° $\int_0^1 (2x-1)^5 dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(2(2x-1)^5)\,dx = \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(2x-1)^6\right]_0^1 = \left(\frac{1}{12}1^6\right)-\left(\frac{1}{12}(-1)^6\right) = \frac{1}{12}-\frac{1}{12} = 0$

EXERCICE II : (6 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x.e^{-x+2}$

1° On dérive F :

Pour tout x de $\mathbb{R}$ $F(x) = (-x-1)e^{-x+2}$

$u(x) = -x-1$ $u'(x) = -1$

$v(x) = e^{-x+2}$ $v'(x) = -e^{-x+2}$

On applique : $(u\times v)' = u'.v+v'.u$

$F'(x) = -1\times e^{-x+2}+(-e^{-x+2})\times(-x-1) = e^{-x+2}(-1+x+1) = xe^{-x+2} = f(x)$

On a $F'(x) = f(x)$, donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2° Sachant que F est une primitive de f :

$$I = \int_0^4 f(x)dx = F(4)-F(0) = (-5e^{-2})-(-1e^2) = e^2-5e^{-2}$$

3° En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur $[0 ; 4]$

$$V_m = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4}(e^2-5e^{-2}) \approx 1{,}68$$

EXERCICE III : (4 points) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(-1+lnx)$

1° Calculer $f'(x)$ $u(x) = x$ $u'(x) = 1$

$v(x) = -1+\ln x$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1\times(-1+\ln x)+\frac{1}{x}\times x = -1+\ln x+1 = \ln x$

2° Calculer en valeur exacte l'intégrale :

On a $f'(x) = \ln x$, donc la fonction f est une primitive de la fonction $ln.$

$$I = \int_1^e (\ln x)dx = f(e)-f(1) = \big(e(-1+lne)\big)-\big(1(-1+ln1)\big) = e(-1+1)+1 = 1$$

EXERCICE I : (points)

1° $C_0 = 3000$

$C_1 = 3000 \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = 3000 \times 1,025 = 3075 \qquad C_2 = 1,025C_1 = 3075 \times 1,025 \approx 3151,88$

2° le capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 2,5%.

$C_{n+1} = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) C_n = 1,025\, C_n$

On en déduit que la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1,025$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $C_0 = 3000$

D'où, $C_n = C_0 \times q^n$ c'est-à-dire $C_n = 3000 \times 1,025^n$.

3° a)

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3000	3075	3152	3231	3311
Condition $U \leq S$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux : arrêt !

3° b) Pour $s = 3300$, on a $n = 4$, d'où l'affichage 2004

3° c) 2004 est la 1$^{\text{ère}}$ année où le capital acquis dépassera 3300€.

4° 2013=2000+13

$C_{13} = 3000 \times 1,025^{13} \approx 4136 < 5000$

On a $C_{13} < 5000$, donc le capital est insuffisant pour les besoins du client.

5° On cherche le plus petit entier n tel que $C_n \geq 3000 \times 3$

$C_n \geq 9000 \Leftrightarrow 3000 \times 1,025^n \geq 9000 \Leftrightarrow 1,025^n \geq 3$

$$\Leftrightarrow \ln(1,025^n) \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \times \ln 1,025 \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,025}$$

De plus $\frac{\ln 3}{\ln 1,025} \approx 44,49$

Ainsi, c'est à partir de l'année 2045que le capital aura été multiplié par 3

EXERCICE II : (points) *d'après* Comptabilité et gestion des organisations 2011

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 6] par $f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$

1° a) $u(x) = 2x^2 + 3x \quad donc\ u'(x) = 4x + 3 \quad ; v(x) = e^{-x} \quad donc\ v'(x) = -e^{-x}$

Pour $x \in [0\,;6]$

$f'(x) = (4x + 3)e^{-x} + (-e^{-x}) \times (2x^2 + 3x) = e^{-x}(4x + 3 - 2x^2 - 3x) = e^{-x}(-2x^2 + x + 3)$

De plus

$(-2x + 3)(x + 1) = -2x^2 - 2x + 3x + 3 = -2x^2 + x + 3$

Ainsi, $f'(x) = (-2x + 3)(x + 1)e^{-x}$

1° b) signe de $f'(x)$

x	0		1,5		6
$-2x + 3$		+	0	−	
$x - 1$		+		+	
e^{-x}		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	

Racine : 1,5

Racine : $-1 \notin [0\,;6]$

$e^X > 0$ sur $\mathbb{R}$

1° c) Tableau de variation

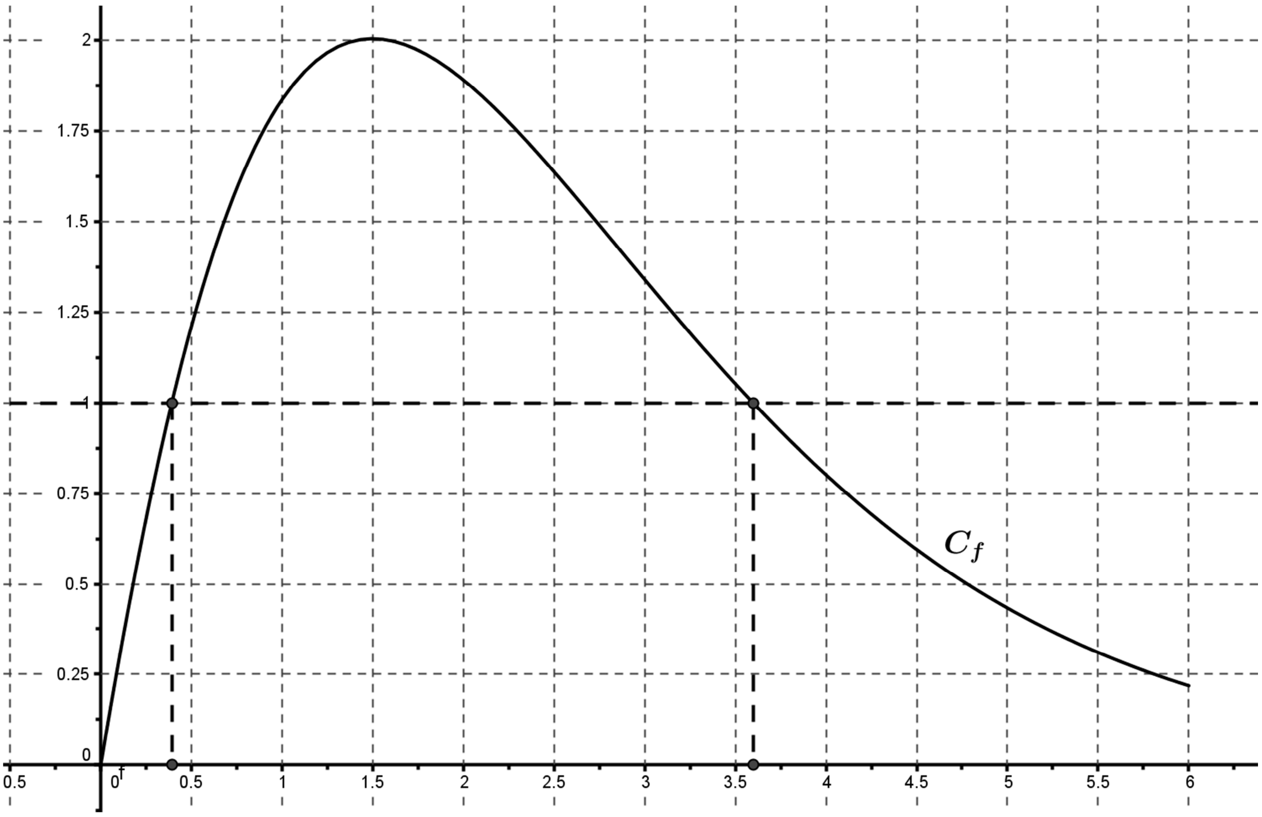
x	0		$1,5$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2,01$	$\searrow$	$0,22$

Images :
$f(1,5) = (2 \times 1,5^2 + 3 \times 1,5)e^{-1,5} = 9e^{-1,5}$
$f(1,5) \approx 2,01$

$f(0) = 0 \quad f(6) = 90e^{-6} \approx 0,22$

2. a. Compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1,84	1 ,89	1,34	0,81	0,44	0,22



2° c) L'équation $f(x) = 1$ a deux solutions dans [0 ; 6] : $\alpha \approx 0,4 \quad \beta \approx 3,6$

B. Calcul intégral

1° Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 6] par : $F(x) = (-2x^2 - 7x - 7)e^{-x}$

On dérive F

Pour $x \in [0\,;6]$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-4x - 7) \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times (-2x^2 - 7x - 7) \\ &= e^{-x}(-4x - 7 + 2x^2 + 7x + 7) \\ &= e^{-x}(2x^2 + 3x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f

2°

$$I = \int_0^6 f(x)dx = F(6) - F(0) = \left((-2 \times 6^2 - 7 \times 6 - 7)e^{-6}\right) - (-7e^0) = -121e^{-6} + 7$$

C. Application des résultats des parties A et B.

1° La production sera maximale au bout de 150 jours et cette production sera 2,080 milliers de tonnes

2° l'équation $f(x) = 1$ a une solution sur [1,5 ; 6], environ égale à 3,6

x	$f(x)$
3,6	1,0033
β	1
3,61	0,9928

La production journalière sera revenue à 1000 tonnes, au bout de 360 jours

3° valeur moyenne de f sur [0 ; 6]

$$V_m = \frac{1}{6-0} \times \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{6} \times I = \frac{1}{6}(-121e^{-6} + 7) \approx 1{,}117$$

<u>EXERCICE III : (points)</u>

1° a) $t = \frac{68500-7000}{7000} \times 100 \approx 879$

La production a augmenté de 879%

1° b) $x^{12} = 9{,}79 \Leftrightarrow x = 9{,}79^{\frac{1}{12}} \qquad x \approx 1{,}21$

$$\left(CM_{moyen}\right)^{12} = CM_{global} \quad d'où\ \ CM_{moyen} = \left(CM_{global}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}21$$

Le taux moyen annuel d'évolution est de 21%.

2° Pour $x \in [2\,;20]$

$$f'(x) = 27131 \times \frac{1}{x} + 0{,}626 \times 3x^2 = \frac{27131}{x} + 1{,}878\,x^2$$

2° b) $x \in [2\,;20]$ donc $x > 0$, donc $\frac{27131}{x} + 1{,}878\,x^2 > 0$ donc $f(x) > 0$

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[2\,;20]$

3° La fonction f est strictement croissante sur $[2\,;20]$,

donc le maximum de la fonction f sur $[2\,;20]$ est (20) , or $f(20) \approx 86285 < 90000$

Selon cette modélisation, l'entreprise ne peut pas dépasser 90000tonnes