MATHEMATIQUES

BTS1 2014-2015

Sujets des devoirs

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	22/09/2014
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE		AUCUN DOCUMENT	

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

EXERCICE I : (6 points)

1° a) Montrer que : $0{,}25x^2 - 6x - 108 = 0{,}25(x+12)(x-36)$

b) Etudier le signe de $0{,}25x^2 - 6x - 108$ pour $x \in [0\,;100]$

2° Factoriser, puis étudier le signe de $3x^2 - 24x$ pour $x \in [0\,;50]$

EXERCICE II : (14 points)

Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriques sont vendus.

L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60.

Il estime que le coût de production de x vases fabriques est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$C(x) = x^2 - 10x + 500$

où x appartient à l'intervalle [0, 60].

Chaque vase est vendu 50 euros.

Sur le graphique donné en annexe, on a tracé la courbe représentative de la fonction C et la droite d'équation $y = 50x$

1° Par lecture graphique, déterminer :

a) le coût de production de 40 vases fabriqués,

b) la production, à une unité près, qui correspond à un coût total de 1250 euros.

2° On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer graphiquement le nombre de vases que l'artisan doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.

3° Résoudre par le calcul sur [0, 60] l'inéquation $R(x) \geq C(x)$

4° a) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x vases, est donné par la fonction B dont l'expression est $B(x) = -x^2 + 60x - 500$ où x appartient à l'intervalle [0, 60].

b) Calculer le bénéfice pour trente vases fabriqués et vendus.

5° L'artisan veut établir une table de bénéfice.

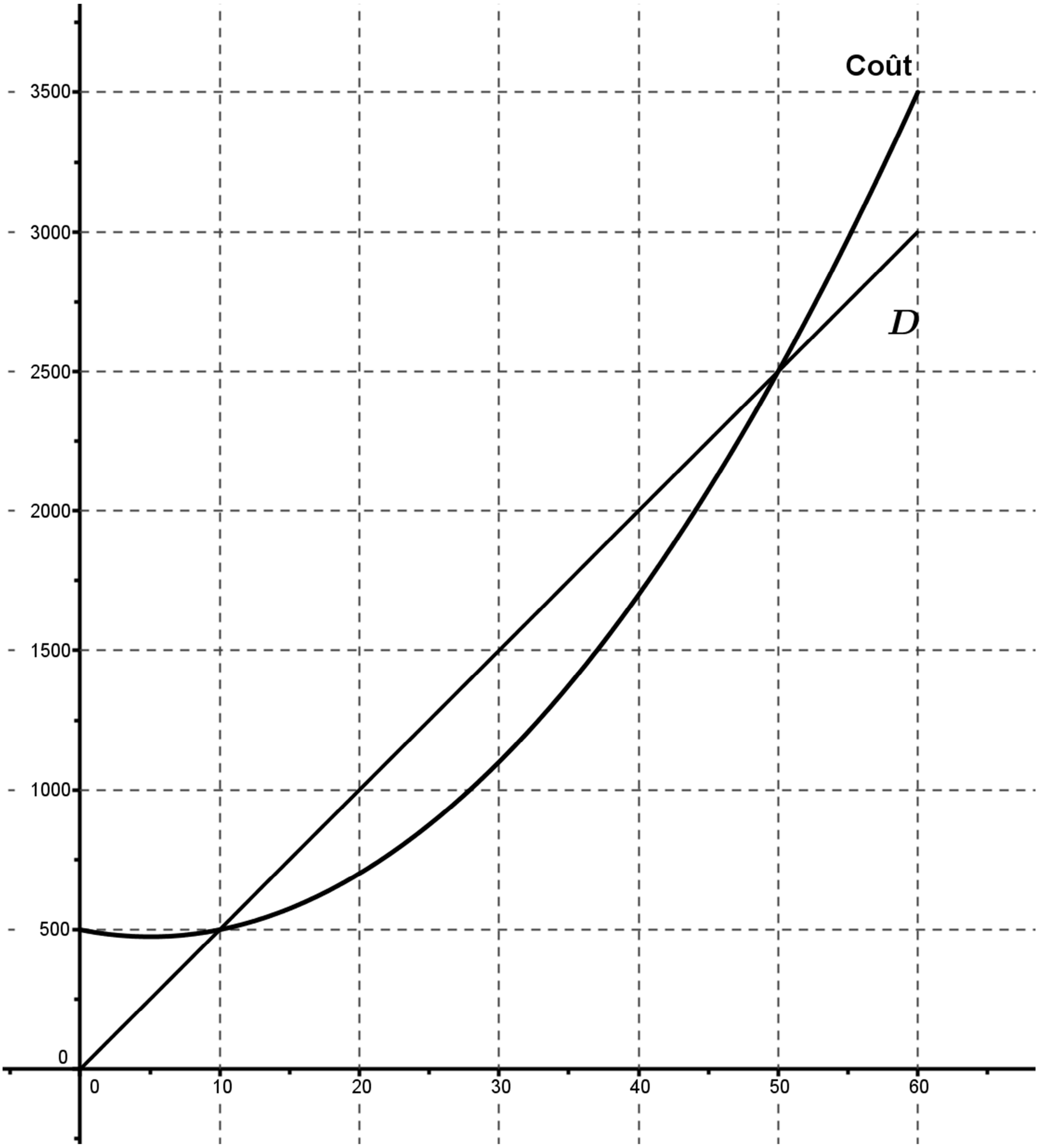
Quelles formules doit-on écrire dans les cellules A4 et B3 pour établir cette table ?

	A	B
1	**nombre de tables**	**bénéfice**
2	**x**	**B(x)**
3	0	
4		
5		

Annexe à rendre.

Les traits de construction seront laissés apparents.

Nom :



DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	17/10/2014
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE		AUCUN DOCUMENT	

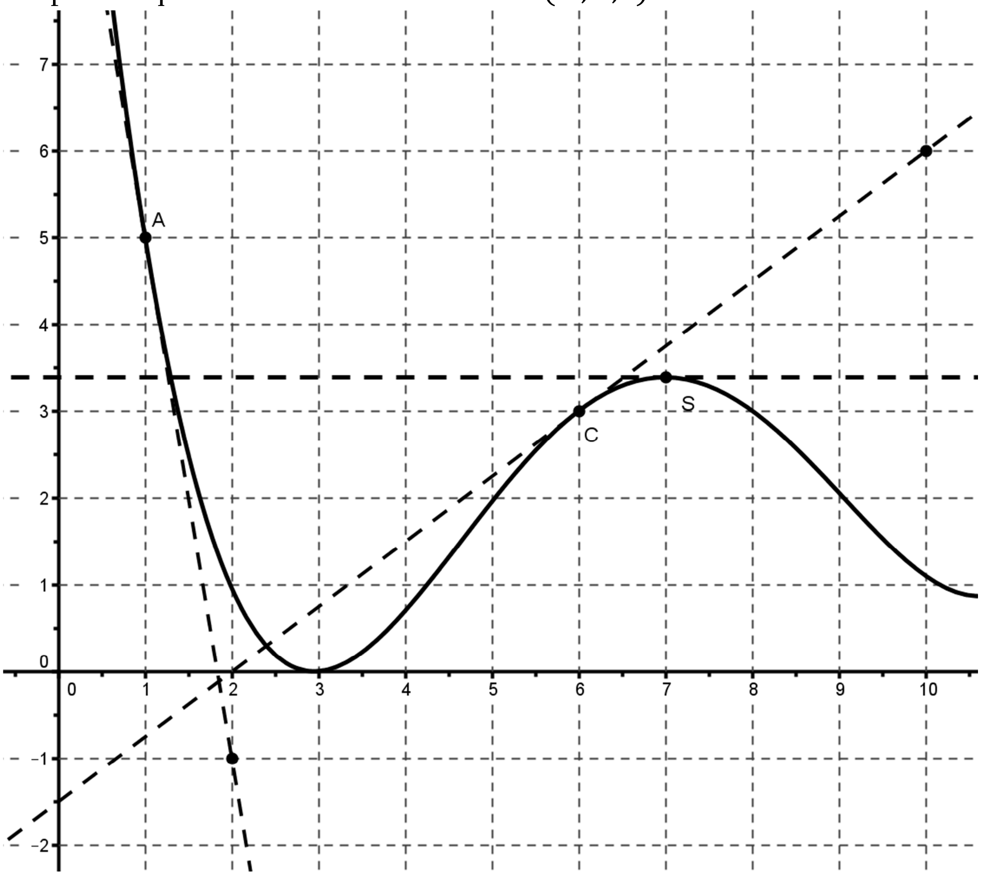
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

EXERCICE I : (4 points)

Aucune justification n'est demandée dans cet exercice. ***Vous pouvez compléter directement sur le sujet.***

On donne la courbe d'une fonction f définie sur $[0{,}6\,;10{,}5]$

On précise que les coordonnées de S sont $(7\,;3{,}4)$



Par lecture graphique,

1° Déterminer :

$f(1\,) = \cdots$ $\quad f'(1) =$ $\quad ; f(6) = \cdots$ $\quad ; f'(6) = \cdots$ $\quad f(7) = \cdots$ $\quad ; f'(7) = \cdots$

2° L'équation de la tangente à la courbe C_f en A est : …

L'équation de la tangente à la courbe C_f en S est : …

<u>EXERCICE II : (16 points)</u>

On s'intéresse à la production d'acier par un fabricant donné. La production journalière varie entre 0 et 18 tonnes d'acier.

Partie A : lecture graphique

La fonction *C* représentée graphiquement en annexe page 3 donne le coût total de production en euros en fonction du nombre de tonnes d'acier produites par jour.

À l'aide de cette courbe, répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique :

1. Quel est le coût total de production pour 12 tonnes d'acier produites par jour ?

2. Combien de tonnes d'acier sont produites par jour pour un coût total de production de 1800 €?

Partie B : étude du bénéfice

La fonction coût de la partie précédente est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 18] par :

$$C(x) = x^3 - 24x^2 + 217x + 200$$

On suppose que, chaque jour, tout l'acier est vendu, au prix de 100 € la tonne.

1. a. Calculer la recette, en euros, réalisée pour la vente de 12 tonnes d'acier.

b. On appelle $R(x)$ la recette, en euros, réalisée pour la vente de x tonnes d'acier.

Déterminer l'expression de $R(x)$ en fonction de x. Tracer la droite représentant la fonction R.

2. a. On appelle $B(x)$ le bénéfice (éventuellement négatif), en euros, réalisé pour la vente de x tonnes d'acier. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.

b. Déterminer une expression $B'(x)$ de la fonction dérivée de B sur l'intervalle [0 ; 18],

et montrer que $B'(x) = -3(x-3)(x-13)$.

c. Etudier le signe de $B'(x)$

d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction B.

e. Déterminer la quantité à produire pour réaliser un bénéfice maximal et préciser ce bénéfice.

3. a. Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet exactement une solution dans [3 ; 13], on la note α.

b. Déterminer un encadrement de α à 0,01 près.

c. On admet que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution dans [13 ; 18] , notée β.

On précise que : $15{,}78 \leq \beta \leq 15{,}79$

Dresser le tableau de signe de $B(x)$.

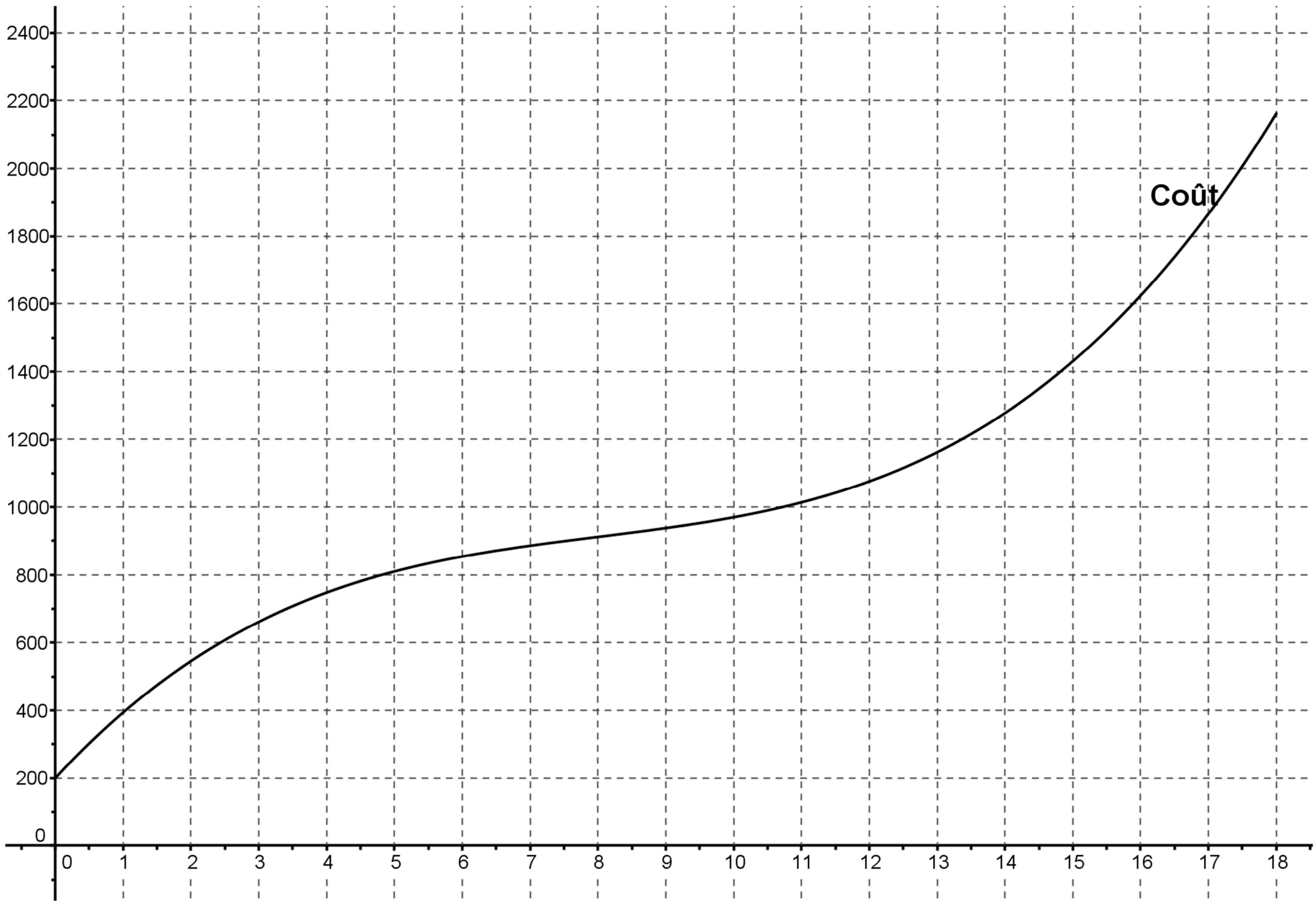
d. Placer α et β sur le graphique.

e. En déduire la plage de bénéfice. On donnera les bornes à 10 kg près.

Annexe exercice II

NOM :

Pensez à mettre en évidence toutes les réponses lues graphiquement et laissez les traits de construction apparents.



La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Nom :

EXERCICE I : (4 points)

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$.
Par lecture graphique, compléter ci-dessous.

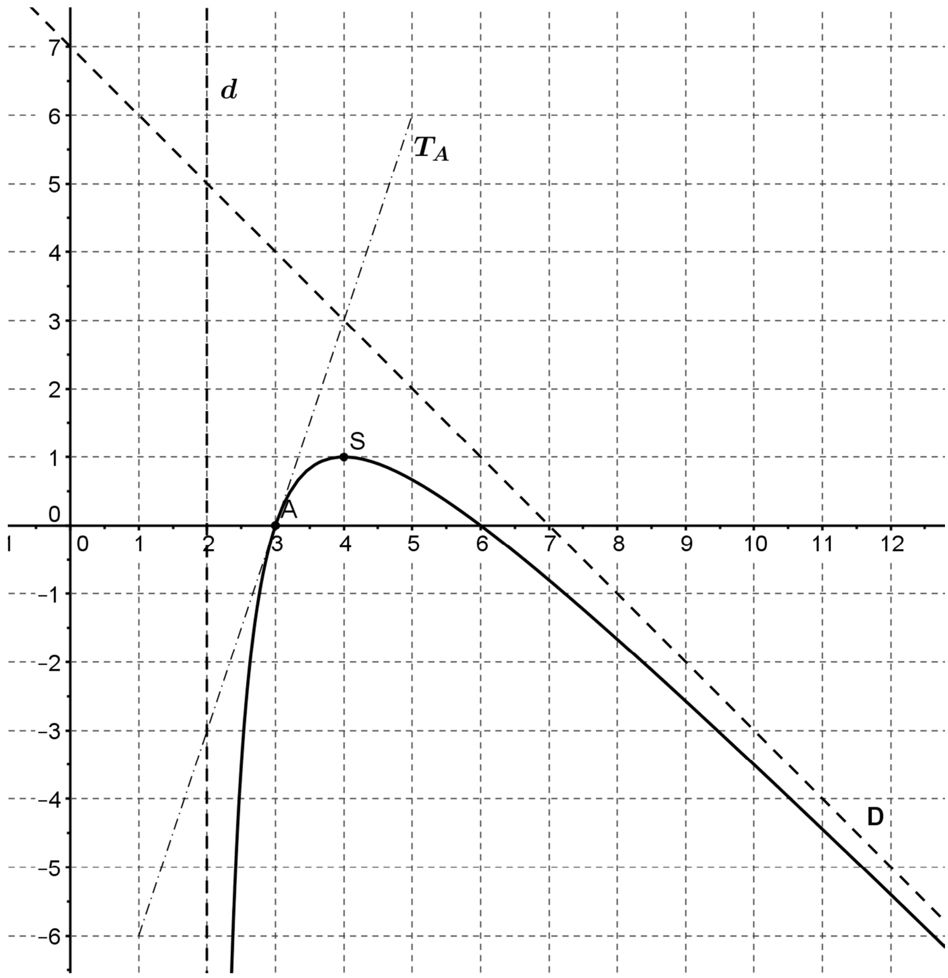
1° Limites

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \ldots.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \cdots$

2° Asymptotes

…



3° a) $f(3) = \cdots$

$f'(3) = \cdots$

b) Equation de la tangente à C_f en A :

….

4° Tableau de variation de la fonction f

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

5° Tableau de signe de $f(x)$

x	
$f(x)$	

EXERCICE II : (10 points)

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : Etude de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 14 + \frac{100}{x}$

On donne sa courbe représentative en annexe ci-dessous.

1. Déterminer la limite en 0. Interpréter graphiquement.

2. a. Déterminer la limite en $+\infty$

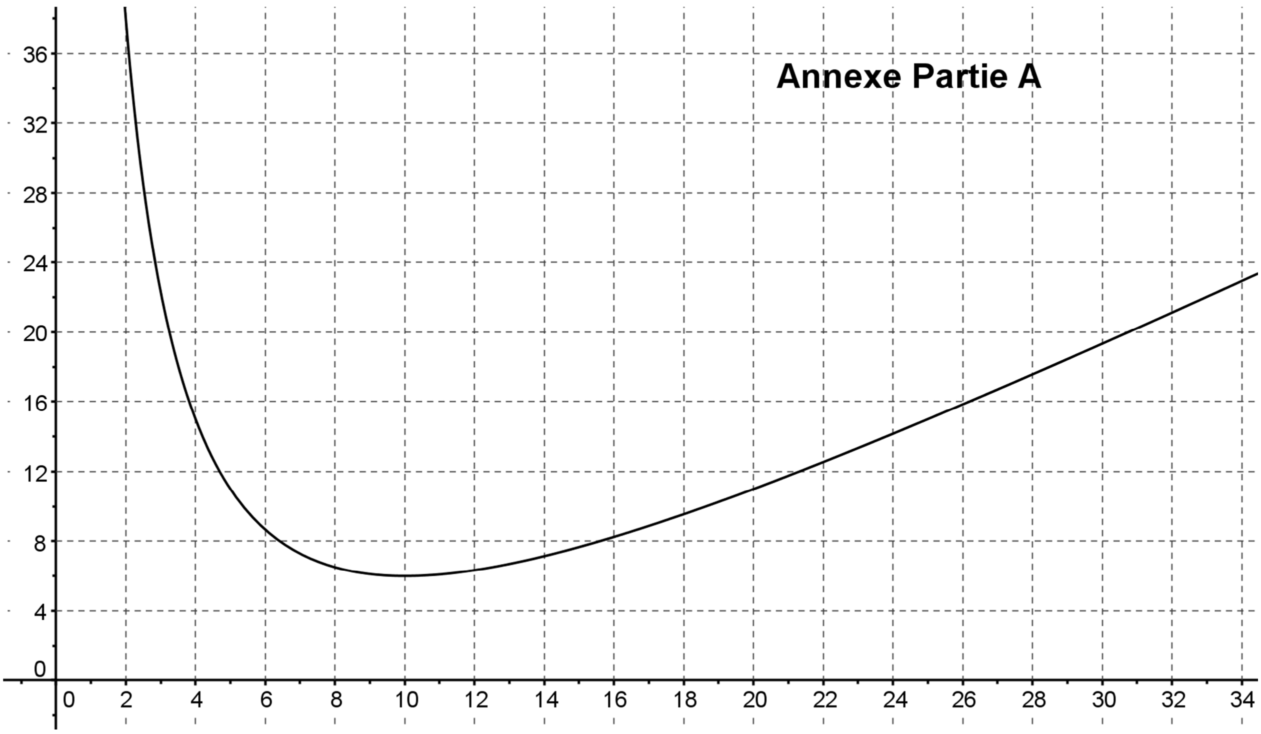
2. b. Montrer que la droite d'équation $y = x - 14$ est asymptote à C_f .

Tracer cette asymptote sur l'annexe.

3. a. Montrer que $f'(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x^2}$

3. b. Etudier le signe de $f'(x)$

3. c. Dresser le tableau de variation de la fonction f



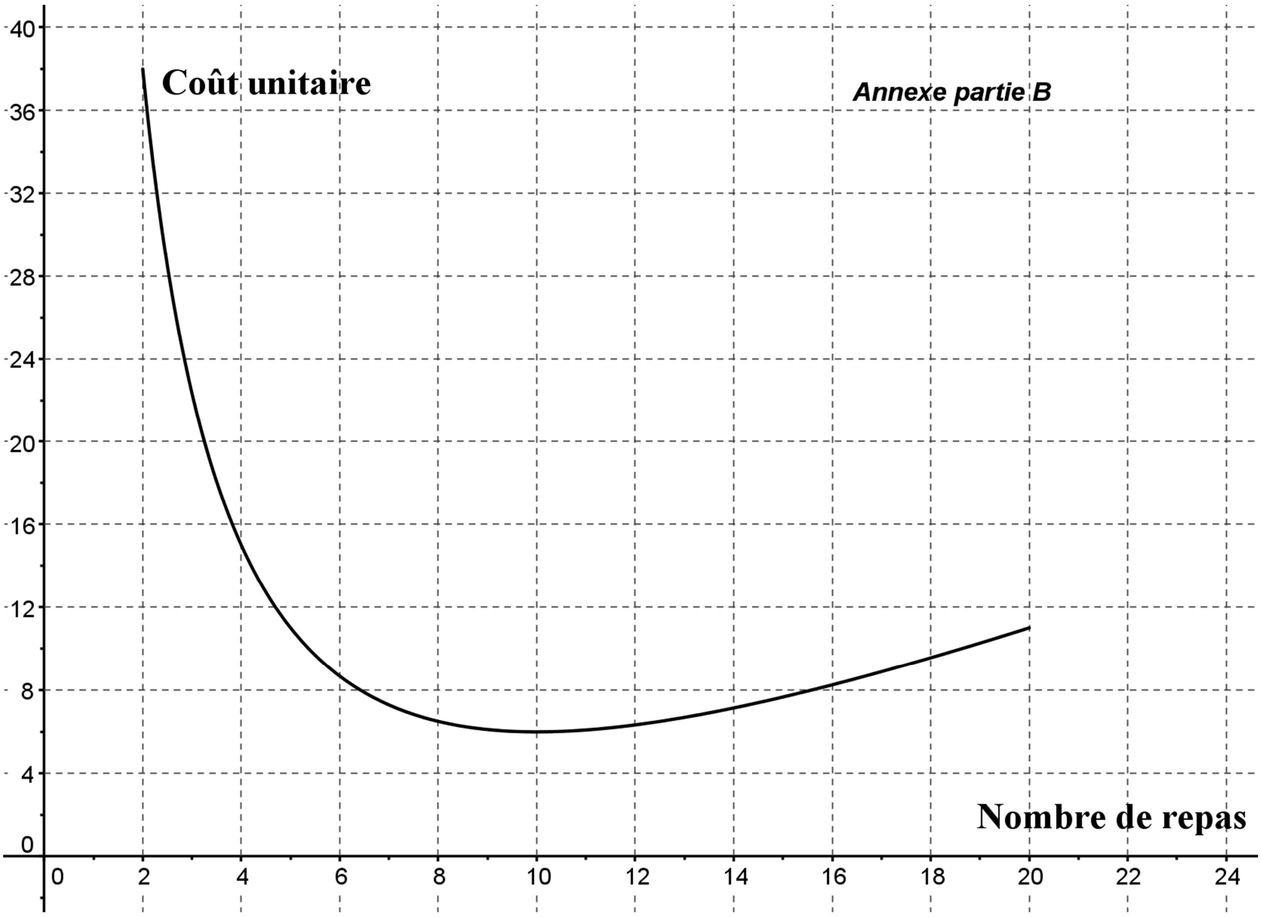
Partie B : Un restaurateur propose chaque jour à midi son «menu du jour » au prix de 18 euros. Il accueille quotidiennement entre 2 et 20 personnes.

On admet que la fonction C dont la courbe est donnée en annexe ci-dessous modélise le coût unitaire de fabrication d'un repas (exprimé en euros) en fonction du nombre de repas servis.

1. À l'aide du graphique fourni :

a. Déterminer le nombre de repas à servir pour que le coût unitaire de fabrication d'un repas soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

b. À partir de combien de repas servis, le restaurateur fera-t-il un bénéfice ? Expliquer la démarche mise en œuvre.



2. On admet que la fonction C est définie sur l'intervalle [2 ; 20] par :

$$C(x) = x - 14 + \frac{100}{x}$$

Dans cette question2, le restaurateur fabrique et sert 8 repas

a. Calculer le coût unitaire de fabrication d'un repas.

b. Calculer le coût total de fabrication des 8 repas ;

c. Calculer le chiffre d'affaires obtenu pour ces 8 repas servis ;

d. Calculer le bénéfice ainsi réalisé par le restaurateur.

3. Désormais, on suppose que x repas sont fabriqués et servis (x entier compris entre 2 et 20).

a. Donner, en fonction de x, l'expression du chiffre d'affaires réalisé.

b. Montrer que le résultat réalisé par le restaurateur est égal à : $-x^2 + 32x - 100$

(On rappelle que le résultat représente le chiffre d'affaires diminué du coût total)

4. On considère la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[2\,;\,20]$ par $B(x) = -x^2 + 32x - 100$

a. Déterminer $B'(x)$, puis dresser le tableau de signe de $B'(x)$sur l'intervalle $[2\,;\,20]$.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[2\,;\,20]$.

5. Combien de repas le restaurateur doit-il servir pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

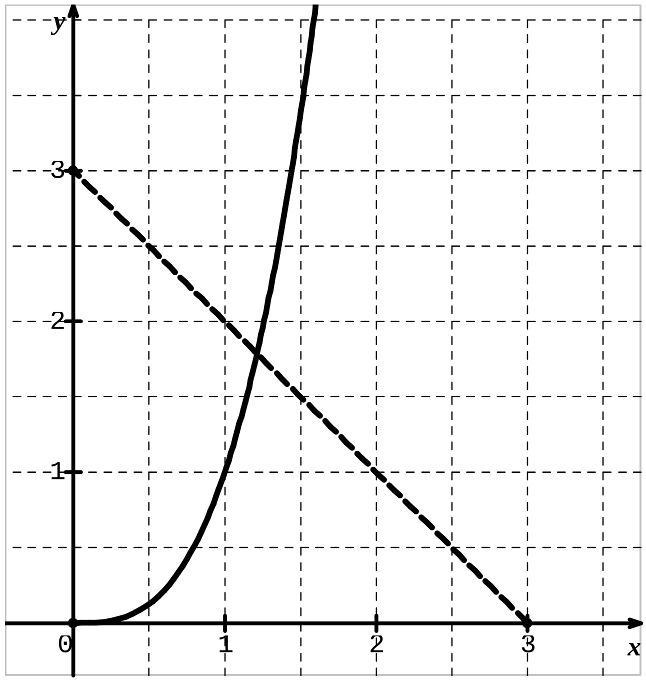
EXERCICE III : (6 points)

Partie A :

On considère les fonctions f et g définies et dérivables sur [0 ; 3] telles que :

$f(x) = x^3$ et $g(x) = 3 - x$.

1. Les courbes représentatives respectives C_f et C_g des fonctions f et g, dans un repère orthogonal, sont tracées ci-contre.



Lire avec la précision permise par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection *E*.

2. La question 2 a pour objectif de déterminer de façon précise l'abscisse de *E*.

Cette abscisse est la solution dans [0 ; 3] de l'équation : $f(x) = g(x)$.

Pour cela, on considère la fonction h définie sur [0 ; 3] par $h(x) = f(x) - g(x)$.

On a : $h(x) = x^3 + x - 3$.

2. a. Calculer $h'(x)$.

En déduire que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 3]

2. b. Dresser le tableau de variation de la fonction h .

2. c. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [0 ; 3]

2. d. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au centième.

Partie B : Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

- $f(x)$ est la quantité, en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de *x* centaines d'euros;

- $g(x)$ est la quantité, en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de *x* centaines d'euros.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de *x* pour laquelle l'offre est égale à la demande.

1. Quel est, exprimé à l'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ?

2. Quel nombre d'articles, (*arrondi à la centaine d'articles près*), correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	05/01/2015
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE		AUCUN DOCUMENT	

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

EXERCICE I : (7 points)

1° Déterminer le plus petit entier n tel que $1{,}04^n \geq 1{,}5$

2° Ecrire $\ln 36$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

3° Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-3 + \ln x \geq 0$

4° On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \ln x$

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à C_f.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

EXERCICE II : (13 points)

Une entreprise fabrique des pièces de haute technologie.
La production hebdomadaire est comprise entre 100 et 2000 pièces.
On désigne par $C(x)$ le coût total de production de x centaines de pièces.
Le prix de vente de 100 pièces est de 10 000€.
La recette en milliers d'euros, obtenue pour la vente de x centaines de pièces est donc $R(x) = 10x$.
On donne les courbes représentatives des fonctions C et R.

Partie A : Lecture graphique

Avec la précision permise par le graphique,

1° Quel est le coût de production de 1400 pièces ?

2° Quelle fabrication hebdomadaire correspond à un coût total de 30 000€ ?

3° Pour quelles productions, l'entreprise est-elle rentable ?

Partie B : Etude du bénéfice

On admet que la fonction C est définie sur $[1\,;20]$ par $C(x) = 0{,}5x^2 + 3x - 8\ln(x)$

1° Montrer que le bénéfice (« le résultat ») est défini par la fonction B telle que :

$$B(x) = -0{,}5x^2 + 7x + 8\ln(x) \quad \text{avec } x \in [1\,;20]$$

2° Calculer $B'(x)$ et montrer que pour $x \in [1\,;20]$, on a :

$$B'(x) = \frac{(-x+8)(x+1)}{x}$$

3° Etudier le signe de $B'(x)$

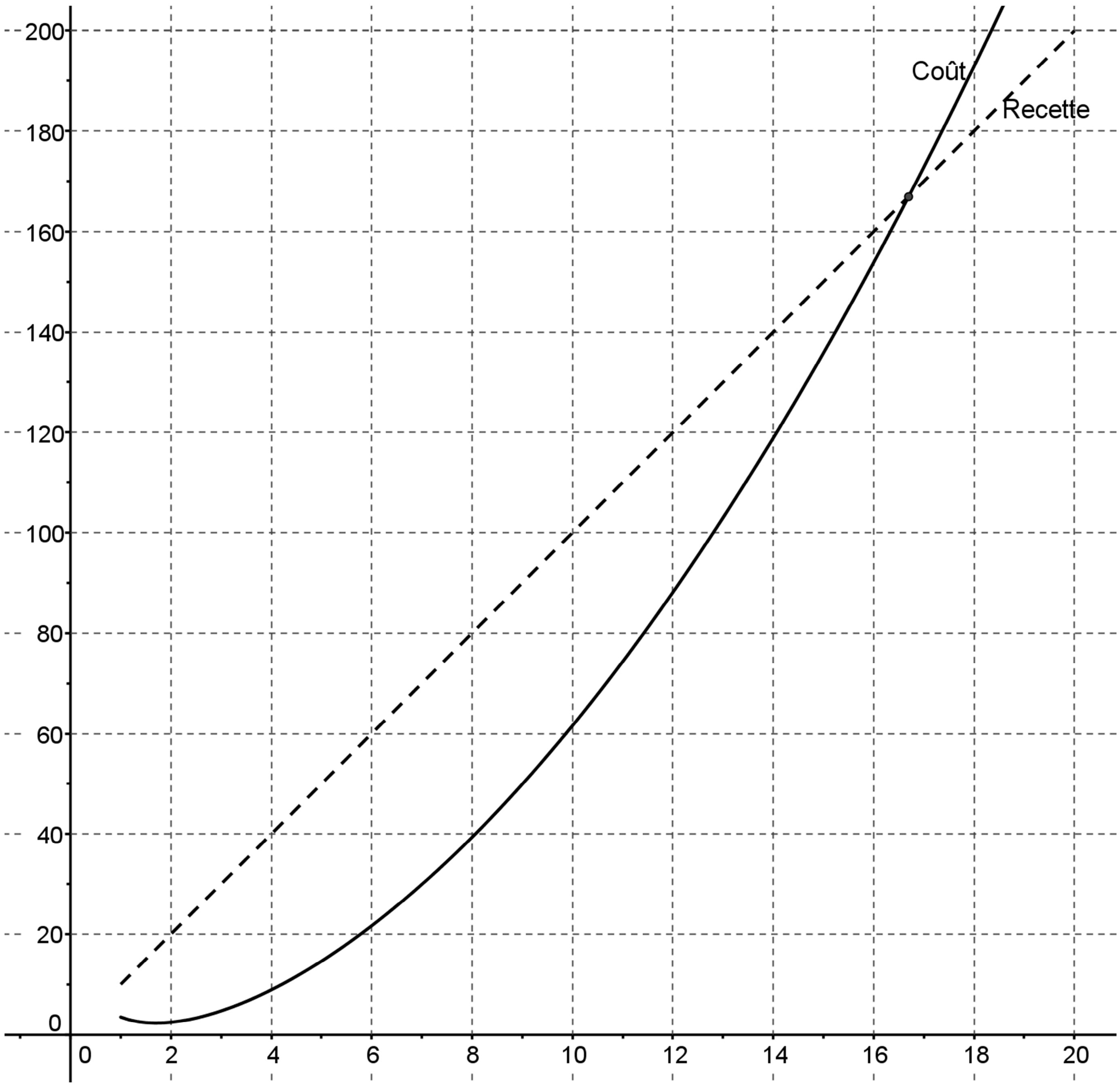
4° Dresser le tableau de variation de la fonction B

5° Pour quelle production ce bénéfice est-il maximal ?
Quel est ce bénéfice maximal (arrondi à 10€ près) ?

6° <u>On admet</u> que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1\,;20]$, notée α.
Placer α dans le tableau de variation, et donner un encadrement de α, d'amplitude 0,1.
En déduire la plage de rentabilité à 10 objets près.

Annexe exercice II

NOM :



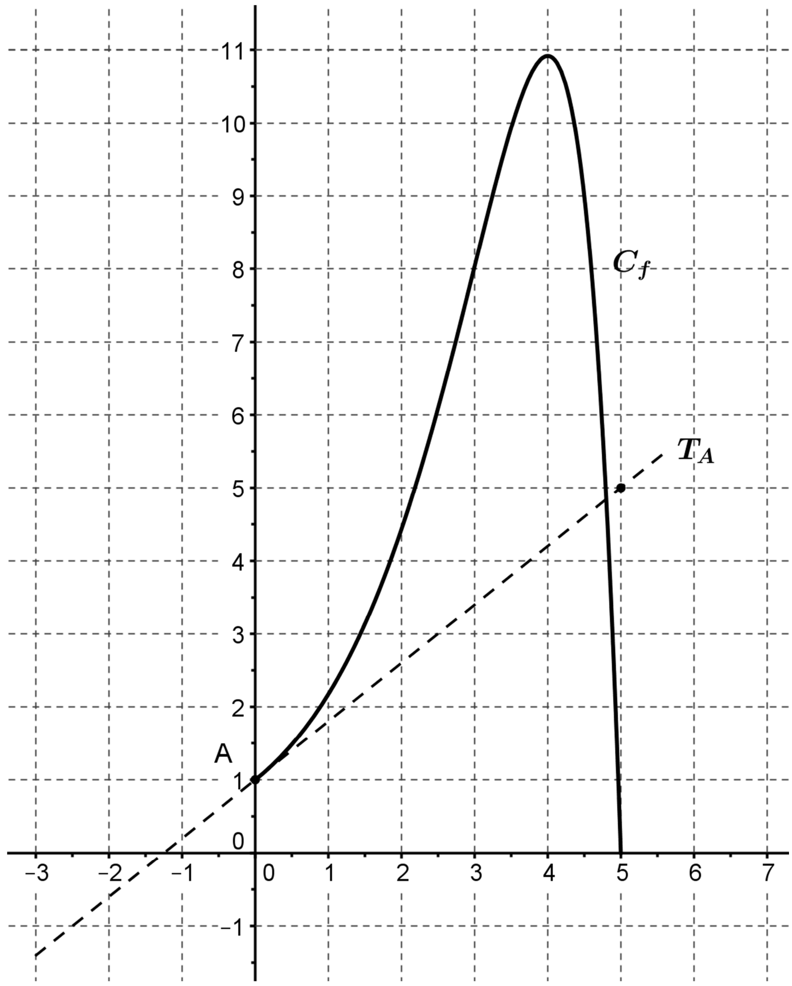
DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	02/02/2015
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE		AUCUN DOCUMENT	

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE I : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = (-0,2x + 1)e^x$

On donne sa courbe représentative dans un repère du plan.
On a tracé la droite T_A tangente en A d'abscisse 0.



1° Par lecture graphique,
a) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse 0.
b) Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

2° Montrer que
$$f'(x) = e^x(-0,2x + 0,8)$$

3° Etudier le signe de $f'(x)$

4° Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 5]$.
On donnera la valeur exacte du maximum de la fonction f, puis la valeur arrondie à 0,01 près.

EXERCICE II : (10 points)

Partie A : On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = -0,2x - 1,5 + 1,3\ln(2x + 1)$
1° Montrer que
$$f'(x) = \frac{-0,4x + 2,4}{2x + 1}$$
2° Etudier le signe de $f'(x)$
3° Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 10]$

Partie B :
La fonction f modélise le bénéfice (« le résultat ») réalisé par un promoteur immobilier lors de la vente de x villas, avec $0 \leq x \leq 10$. Le bénéfice est exprimé en millions d'euros.
1° Déterminer le nombre de villas à réaliser pour obtenir un bénéfice maximal, et préciser ce bénéfice maximal, on donnera la valeur arrondie à 1000€ près.
2° Déterminer le nombre minimum de villas à réaliser pour que l'entreprise ne soit pas déficitaire. Justifier.

BTS Blanc MATHEMATIQUES	BTS1	2 HEURES	04/03/2015
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE			AUCUN DOCUMENT

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Nom :

EXERCICE I : (5,5 points)

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [1 ; 10] par $f(x) = 8\ln(16x - 10) + 7$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur [1 ; 10].

a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel *x* de [1 ; 10].

b. Étudier le signe de $f'(x)$ quand *x* varie dans [1 ; 10].

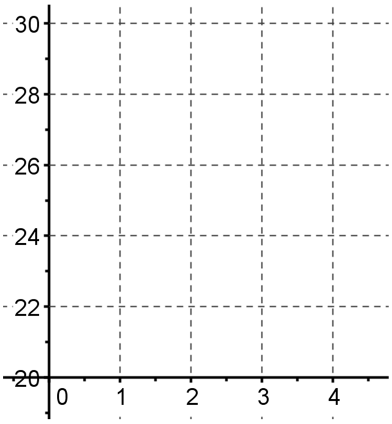
2. Établir le tableau de variations de f sur [1 ; 10].

3. a. Compléter, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$f(x)$									

b. Sur la feuille de papier millimétré fournie, construire la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal.

On prendra pour unité 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 sur l'axe des ordonnées ; la graduation commençant à 0 sur l'axe des abscisses et à 20 sur l'axe des ordonnées ; comme indiqué sur le modèle ci-dessous



c. Résoudre graphiquement dans [1 ; 10] l'équation $f(x) = 35$. On fera apparaître sur le graphique les constructions utiles.

Partie B. Application des résultats de la partie A

On admet que le chiffre d'affaires, en millions d'euros, d'un ensemble d'entrepreneurs est donné, pour l'année $(2000 + n)$, par $f(n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

1. Déterminer le chiffre d'affaires en millions d'euros, arrondi à 10^{-1}, pour l'année 2008.

2. En quelle année le chiffre d'affaires a-t-il dépassé 35 millions d'euros ?

EXERCICE II : (7 points)

Une entreprise peut extraire entre 2 000 et 15 000 tonnes de minerai d'une carrière.

Le résultat d'exploitation, en millions d'euros, qu'elle envisage en fonction de la quantité de minerai extraite, est représenté par la courbe C en annexe page 3.

Partie A : Lecture graphique

1° Avec la précision permise par le graphique, compléter le tableau suivant :

Quantité de minerai extraite x en milliers de tonnes	2	6	9	15
Résultat d'exploitation $R(x)$ envisagé en millions d'euros			3,8	

2° Le résultat d'exploitation $R(x)$ est-il proportionnel à la quantité de minerai extraite ? Justifier.

3° Déterminer à partir de quelle quantité extraite le résultat d'exploitation est positif.

4° Déterminer la quantité extraite pour laquelle le résultat d'exploitation est maximum.

5° Déterminer les quantités extraites pour lesquelles le résultat d'exploitation est de 3 millions d'euros.

Partie B : Utilisation d'une fonction

Le but de cette partie est d'obtenir une meilleure précision sur la détermination de la quantité à extraire pour obtenir le résultat d'exploitation maximal. La courbe C représentant le résultat d'exploitation est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 15]$ par : $f(x) = (4x - 13)e^{-0,2x}$

1°Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ sur l'intervalle $[2; 15]$

Donner une interprétation économique de ce résultat.

2° On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2; 15]$

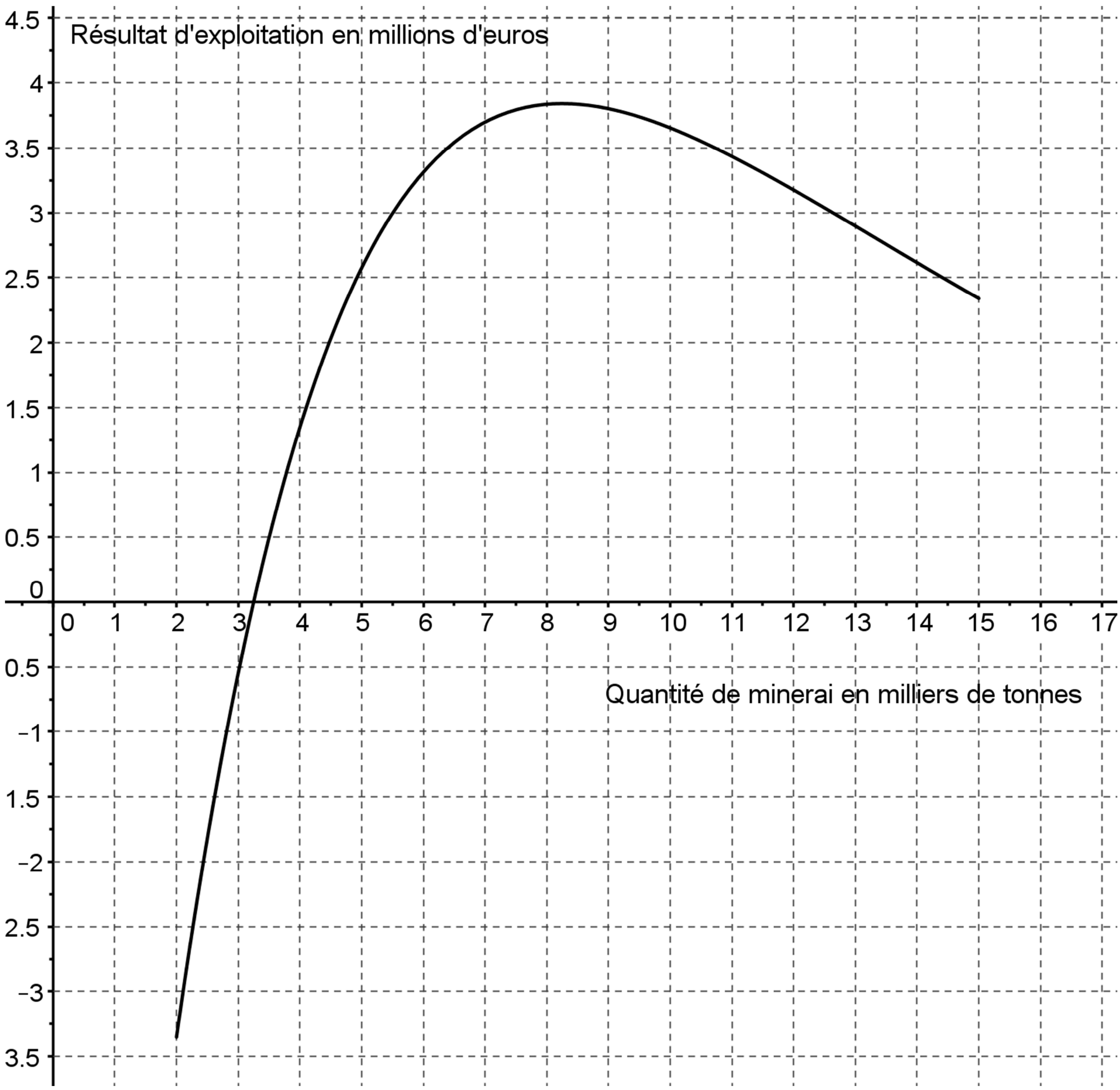
Montrer que $f'(x) = (6,6 - 0,8x)e^{-0,2x}$

3° Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2; 15]$, dresser le tableau de variations de f et conclure.

Annexe exercice II

NOM :

Laissez apparents tous les traits de construction.



EXERCICE III : (6 points)

Une barrière de corail ceinture un atoll mais une algue brune prolifère au détriment du corail.
Des relevés annuels menés tous les 1er janvier, à partir du 1er janvier 2010 font ressortir les informations suivantes :
Au 1er janvier 2010 la superficie d'algue est de 150 000 m^2 et elle augmente de 15 % par an.
À la même date la superficie du corail est de 350 000 m^2 et diminue de 15 000 m^2 par an.

1. Calculer la superficie d'algue et celle de corail au 1er janvier 2011.

2. Soit n un entier naturel, on note u_n la superficie d'algue au 1er janvier $2010 + n$. Ainsi $u_0 = 150\,000$.
a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. Calculer u_5 arrondi à l'entier. Que représente cette valeur ?
d. Résoudre l'inéquation $u_n > 450\,000$. Déterminer le plus petit entier n solution. Interpréter la valeur obtenue.

3. Soit n un entier naturel, on note c_n la superficie du corail au 1er janvier $2010 + n$. Ainsi $c_0 = 350\,000$
a. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n et en déduire la nature de la suite (c_n)
b. Exprimer c_n en fonction de n.
c. Calculer c_5. Que représente cette valeur ?

EXERCICE IV : (1.5 points)

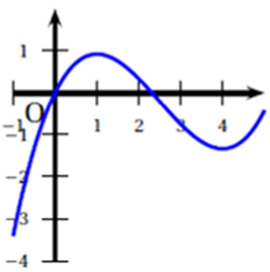
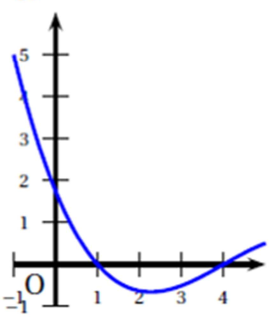
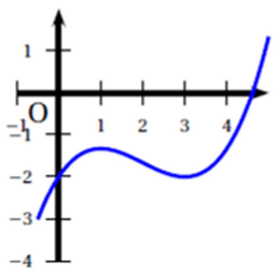
*Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte. Aucune justification n'est demandée. Indiquer sur la copie le numéro de la question **et** recopier la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Question 1 : L'équation $e^x - 5 = 0$ admet pour solution :
a. e^5 **b.** ln(5) **c.** $5e$

Question 2. Dans cette question f est une fonction définie dérivable sur l'intervalle $[-1;\ 5]$.
Dans le tableau suivant figure le signe de la dérivée f' sur $[-1;\ 5]$.

x	-1		1		4		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'une des trois courbes est la courbe représentative de la fonction f. Laquelle ?

a.

b.

c.


Question 3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de 1er terme $u_0 = 3$
La valeur arrondie à 10^{-1} de la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$ est égale à :
a. 22,3 **b.** 29,8 **c.** 38,8

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	30/03/2015
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE		AUCUN DOCUMENT	

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

NOM

EXERCICE I : (6 points)

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

• chaque année 30% des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

• chaque année, la société accueille 500 nouveaux abonnés ;

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.

On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2010 + n$.

1° Déterminer le nombre d'abonnés en 2011.

2° Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3° Voici un algorithme :

VARIABLES :	*U* est un réel *N* est un entier naturel
INITIALISATION :	*U* prend la valeur 1 500 *N* prend la valeur 0

TRAITEMENT :	Tant que $U \leq 1650$
	    N prend la valeur *N* +1
	    U prend la valeur 0,7×*U*+*500*
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher *N*

a) Remplir le tableau. *On fera autant de colonnes que nécessaire*. On écrira les valeurs de u arrondies à l'entier.

N			
U			
Test Tant que			

b) Préciser la valeur affichée. Interpréter cette valeur dans le contexte de la salle de sports.

EXERCICE II : (3 points)

Calculer en valeur exacte, puis en valeur approchée à 1 près, la somme des 12 premiers termes d'une suite (u_n) géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de 1^er^ terme $u_0 = 25$.

EXERCICE III : (11 points)

Le premier janvier 2000, deux bébés viennent au monde : Urbain et Victor. Leurs familles respectives décident alors d'épargner pour leur enfant.

La famille d'Urbain verse 3 000 euros le jour de la naissance de leur fils, sur un compte où le taux d'intérêt annuel est de 2,75%. Aucun retrait ni dépôt ne s'effectuent pendant les années suivantes. Le taux d'intérêt reste fixe.

La famille de Victor place 1 000 euros dans une tirelire le 01/01/2000 et y verse ensuite, chaque premier janvier suivant, 240 euros sans jamais effectuer de retrait.

1. Calculer l'argent disponible sur le compte de chaque enfant le jour de leur 1^{er} anniversaire.

On appelle u_n le montant en euros du compte d'Urbain le premier janvier de l'année 2000+n.

On appelle v_n le montant en euros de la tirelire de Victor le premier janvier de l'année 2000+n.

Sur **l'annexe ci-dessous**, à rendre avec la copie, on a représenté la situation dans une feuille de calcul d'un tableur. Les réponses aux questions 2 et 3 seront reportées directement dans le tableau annexe

2. a. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule C3 si l'on veut obtenir par recopie vers le bas les valeurs de la suite (u_n) ?

b. Quelle formule contient alors la cellule C7 ?

3. a. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule D3 si l'on veut obtenir par recopie vers le bas les valeurs de la suite (v_n) ?

b. Quelle formule contient alors la cellule D8 ?

4. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n)

b. Exprimer u_n en fonction de n.

5. a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n)

b. Exprimer v_n en fonction de n.

6. A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle date anniversaire Victor aura-t-il plus d'argent dans sa tirelire qu'Urbain sur son compte ?

7. Urbain peut disposer de la totalité de l'argent disponible sur son compte après son dix-huitième anniversaire. Sa famille poursuit les versements annuels.

a. Avec la somme disponible sur son compte, pourra-t-il acheter une voiture d'une valeur de 5500€ dès le 2 janvier 2018 ?

b. Résoudre l'inéquation $u_n \geq 5500$, et en déduire le nombre minimum d'années nécessaire pour que le montant disponible sur son compte soit suffisant permettant d'acheter la voiture ?

ANNEXE

	A	B	C	D
1	Année	Rang du terme de chaque suite : n	Compte Urbain : u_n	Tirelire Victor : v_n
2	2000	0	3000	1000
3	2001	1		
4	2002	2		
5	2003	3		
6	2004	4		
7	2005	5		
8	2006	6		
9	2007	7		

BTS Blanc MATHEMATIQUES	BTS1	2 HEURES		20/05/2015
CALCULATRICE PERSONNELLE AUTORISEE				AUCUN DOCUMENT

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Nom :

EXERCICE I : (7 points)

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ 13]$ par : $f(x) = 3x + 14 - 12\ln(2x)$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur [1 ; 13]

a. Calculer $f'(x)$ pour tout *x* de $[1\ ;\ 13]$.

b. Montrer que, pour tout *x* de $[1\ ;\ 13]$, $f'(x) = \frac{3x-12}{x}$

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ 13]$.

d. Construire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ 13]$.

2. D'après le tableau de variations ci-dessus, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution dans [1 ; 13] que l'on note α

A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α

B. Calcul intégral

1. Soit *F* la fonction définie sur [1 ; 13] par

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12x\ln(2x)$$

Vérifier que F est une primitive de f sur $[1\ ;\ 13]$.

2. On note : $I = \int_1^{13} f(x)dx$.

Démontrer que $I = 564 - 156\,ln(26) + 12ln(2)$.

3. En déduire la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de la fonction f sur [1 ; 13]. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de V_m

EXERCICE II : (8 points)

Une entreprise fabrique un certain type d'articles. Sa capacité maximale de production est 80 articles.

Partie A. Calcul intégral.

On admet que le coût total de production, en centaines d'euros, en fonction du nombre x d'articles fabriqués par cette entreprise est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 80]$ par :

$f(x) = 1{,}36\, e^{0{,}04x}$

1. Calculer $f\ (0)$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

2. On note : $I = \int_1^{80} f(x)dx$

Montrer que $I = 34(e^{3{,}2} - e^{0{,}04})$

3. En déduire une valeur arrondie à 10^{-2} de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 80]$.

4. Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation de la valeur trouvée à la question précédente.

Partie B. Étude d'une fonction et applications.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 80]$ par

$$g(x) = \frac{1{,}36e^{0{,}04x}}{x}$$

On note C_g la courbe représentative la fonction g dans le plan muni d'un repère orthogonal donnée en **annexe page 3. Cette annexe est à rendre avec la copie.**

1. On admet que la fonction g est dérivable et on désigne par g' sa fonction dérivée.

a. Montrer, en détaillant les calculs que, pour tout x de l'intervalle $[1\ ;\ 80]$,

$$g'(x) = \frac{1{,}36e^{0{,}04x}(0{,}04x - 1)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de $g\ '(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 80]$.

c. Établir le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ 80]$. On précisera les valeurs particulières (extrémums et valeurs aux bornes).

d. Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[1\ ;\ 80]$ l'inéquation $g\ (x) \leq 0{,}25$.

On laissera sur la figure **de l'annexe** les traits de construction.

2. On admet que la fonction g définie dans cette partie modélise le coût moyen de production d'un article, exprimé en centaines d'euros ; autrement dit, pour x articles fabriqués, $g\ (x)$ correspond au coût moyen de production d'un article.

On suppose que l'entreprise fabrique au moins un article.

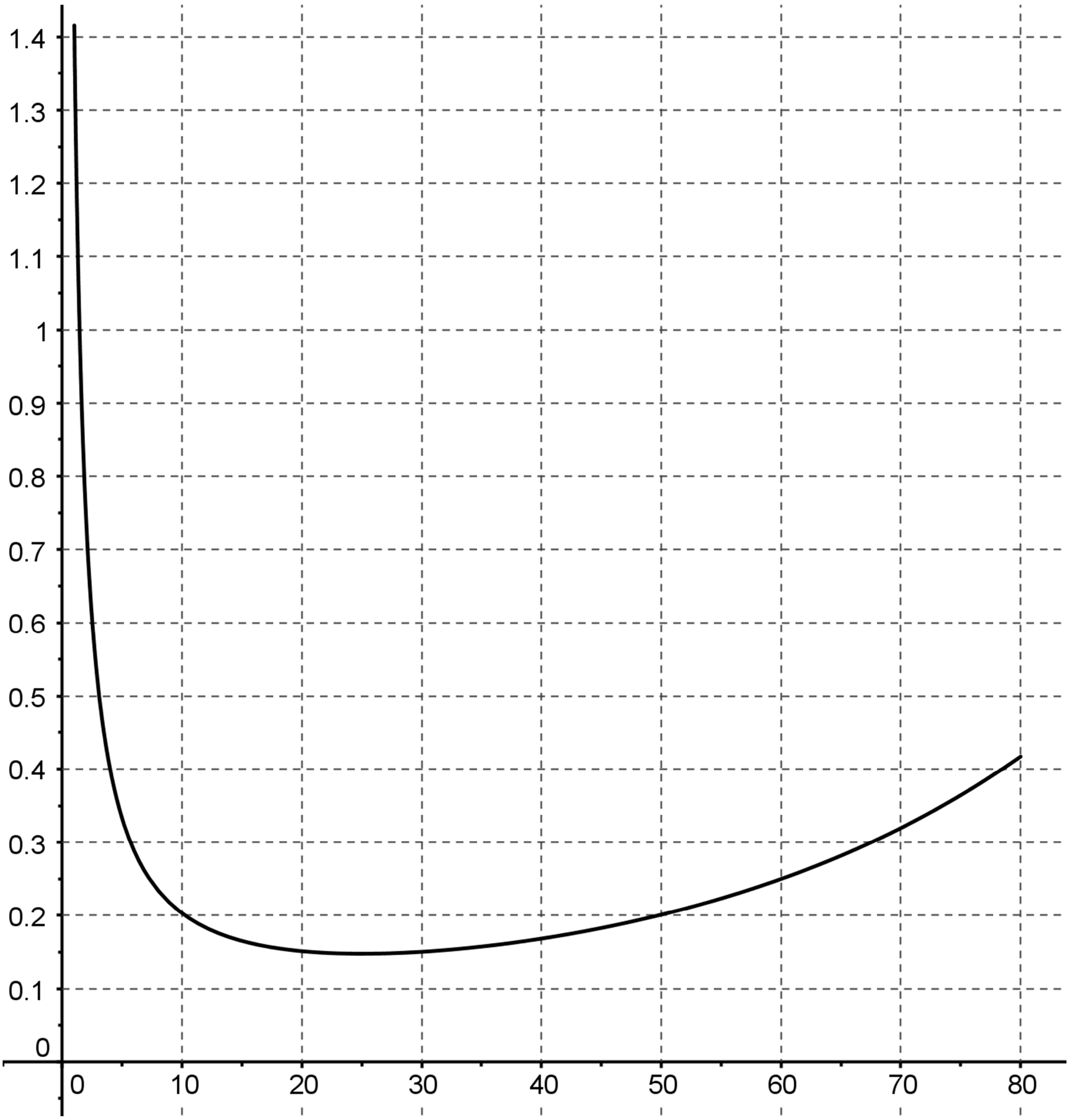
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats obtenus précédemment.

a. Combien l'entreprise doit-elle fabriquer d'articles pour que le coût moyen de production d'un article soit minimal ?

b. On souhaite que le coût moyen de production d'un article soit inférieur ou égal à 25 euros.

Pour quelles quantités d'articles à fabriquer cet objectif est-il atteint ?

Annexe Exercice II

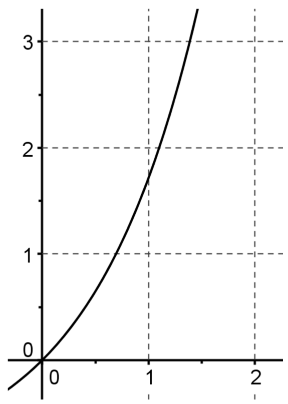


EXERCICE III : (2 points)

*Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des deux questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte. Aucune justification n'est demandée. Indiquer sur la copie le numéro de la question **et** recopier la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

1. g est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{5}{x}$.
On note *C* sa courbe représentative.
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe *C*, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 6$, est égale à :
a. $5(\ln 6 - \ln 2)$ **b.** $\frac{1}{6-2}\int_2^6 g(x)dx$ **c.** $5\ln 6 + 5\ln 2$ **d.** $g(6) - g(2)$

2. On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f dans un repère du plan.
La valeur de $\int_0^1 f(x)dx$ est :
a. $e - 2$ **b.** 2
c. 1/4 **d.** $ln\left(\frac{1}{2}\right)$



EXERCICE IV : (3 points)

Une marque a mis sur le marché une nouvelle machine destinée aux entreprises.
On a relevé pendant six trimestres consécutifs, en fin du trimestre, la quantité de machines vendues au total depuis la première mise sur le marché.
Le tableau suivant indique cette quantité, en fonction du rang t du trimestre.

t	1	2	3	4	5	6
Quantité de machines	256	330	423	544	698	896

On sait donc par exemple qu'en fin de première année, c'est-à-dire lorsque $t = 4$, cette marque a vendu 544 machines.
On modélise les quantités de machines vendues depuis le lancement par une suite géométrique (u_n) de raison q où n est le rang du trimestre mesuré à partir de la mise sur le marché de la machine.
On pose $u_1 = 256$ et $u_3 = 423$
1. Exprimer u_3 en fonction de q.

2. En déduire la valeur de q^2 puis calculer une valeur approchée de q à 0,01 près.

3. On admet que $u_n = 256 \times 1{,}28^{n-1}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
À l'aide de ce modèle :
a. Donner une estimation du nombre de machines vendues 2 ans après le lancement.
b. Déterminer le rang du trimestre à partir duquel la quantité de machines vendues dépassera 2 000.