MATHEMATIQUES

BTS1 2016-2017

Corrigés des devoirs

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	03/10/2016

EXERCICE I : (2 points)

Mr K. initialement condamné à une amende de 5 milliards d'euros a vu sa condamnation réduite à 1 million d'euros. Calculer le pourcentage de remise accordé.

$$t = \frac{1-5000}{5000} \times 100 = -99{,}98$$

Le pourcentage de remise accordé est de 99,98%

EXERCICE II : (4 points)

Compléter les valeurs manquantes. Aucune justification n'est demandée.

Si nécessaire, les valeurs initiales et finales seront arrondies au centième, les pourcentages d'évolution seront arrondis à 0,01%

Valeur initiale	**Valeur finale**	CM	**Evolution en %**
1250	1312,5	1,05	+5%
200	600	3	+200%
12,15	12,82	1,0551	+5,51%
125	124	0,992	$-0{,}8\%$

EXERCICE III : (3 points)

Après deux augmentations successives, la première de 5%, la seconde de 12% , un équipement ménager coûte 458,64 €. Combien coûtait-il avant les deux augmentations ?

$$CM_{global} = 1{,}05 \times 1{,}12 = 1{,}176$$

$$V_{initiale} = \frac{V_{finale}}{CM_{global}} = \frac{458{,}64}{1{,}176} = 390$$

L'équipement ménager coûtait 390€ avant les deux augmentations.

EXERCICE IV : (4 points)

L'évolution des achats d'automobiles neuves et d'occasion était irrégulière entre 2007 et 2011, mais la chute est très forte depuis 2012.

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Taux en %	4,3	-6,9	7,5	-2,7	0,9	-10,2	-7,8

1° Calculer le coefficient multiplicateur global des achats d'automobile correspondant à ces 7 évolutions

$$CM_{global} = \left(1+\frac{4.3}{100}\right) \times \left(1-\frac{6{,}9}{100}\right) \times 1{,}075 \times 0{,}973 \times 1{,}009 \times 0{,}898 \times 0{,}922 \approx 0{,}8485$$

2° En déduire le taux d'évolution global entre le 1er janvier 2007 et le 31 décembre 2013.

$$t_{global} = \left(CM_{global} - 1\right) \times 100 = -15{,}15$$

Globalement, le marché des automobiles neuves a diminué de 15.15% en 7 ans.

3° Calculer le taux d'évolution annuel moyen entre le 1er janvier 2007 et le 31 décembre 2013. Arrondir à 0,01%

$$CM_{moyen} = \left(CM_{global}\right)^{\frac{1}{7}} = 0{,}8485^{\frac{1}{7}} \approx 0{,}9768$$

$$t_{moyen} = \left(CM_{moyen} - 1\right) \times 100 \approx -2{,}32$$

En moyenne , le marché a chuté de 2,32% par an durant cette période

EXERCICE V : (3 points)

Durant une année de crise, le secteur du bâtiment a enregistré une chute de 32% de son chiffre d'affaires Quelle devrait être l'évolution l'année suivante pour que le chiffre d'affaires retrouve son niveau antérieur ? on donnera le taux à 0,1%.

$CM_{réciproque} \times 0{,}68 = 1$

$CM_{réciproque} = \dfrac{1}{0{,}68} \approx 1{,}471$

Pour compenser une chute de 32%, il faudrait une hausse de 47,1%

EXERCICE VI : (4 points)

Un commerçant possède trois magasins. Le tableau ci-dessous donne la répartition de son chiffre d'affaires.

	A	B	C	D	E
1		magasin A	magasin B	magasin C	total
2	chiffre d'affaires en 2013	120 000	100 000	90 000	
3	proportion				
4	chiffre d'affaires en 2014	124 000	110 000	98 000	
5	proportion				
6	evolution 2013-2014				

Les lignes 3-5-6 sont au format pourcentage.

a) Quelles formules doit-on écrire en E2 et E4 pour obtenir le chiffre d'affaires total par année.

Dans E2 :

$= \boldsymbol{SOMME}(\boldsymbol{B2}:\boldsymbol{D2})$

Dans E4 :

$= \boldsymbol{SOMME}(\boldsymbol{B4}:\boldsymbol{D4})$

b) Quelle formule écrite en B3 permettra par recopie jusqu'en D3 d'obtenir le pourcentage de son chiffre d'affaire dans chaque magasin en 2013 ? Même travail pour l'année 2014.

Dans B3 : $= \boldsymbol{B2}/\$\boldsymbol{E}\$\boldsymbol{2}$ **OU** $= \boldsymbol{B2}/\$\boldsymbol{E2}$

Dans B5 : $= \boldsymbol{B4}/\$\boldsymbol{E}\$\boldsymbol{4}$ OU $= \boldsymbol{B4}/\$\boldsymbol{E4}$

c) Quelle formule écrite en B6 donnera par recopie jusqu'à E6, le taux d'évolution du chiffre d'affaires par magasin entre 2013 et 2014 ?

Dans B6 : $= (\boldsymbol{B4} - \boldsymbol{B2})/\boldsymbol{B2}$ OU $= \boldsymbol{B4}/\boldsymbol{B2} - 1$

Ex1

Droite D_1

$m_1 = \dfrac{0{,}7 - 0{,}2}{5 - 0} = \dfrac{0{,}5}{5} = 0{,}1$

D_1 passe par le point de coordonnées (5 ; 0,7)

$f_1(x) = 0{,}1(x - 5) + 0{,}7$

$\boldsymbol{f_1(x) = 0{,}1x + 0{,}2}$

Droite D_2

$m_2 = \dfrac{0{,}2 - 0{,}5}{6 - 1} = \dfrac{-0{,}3}{5} = -0{,}06$

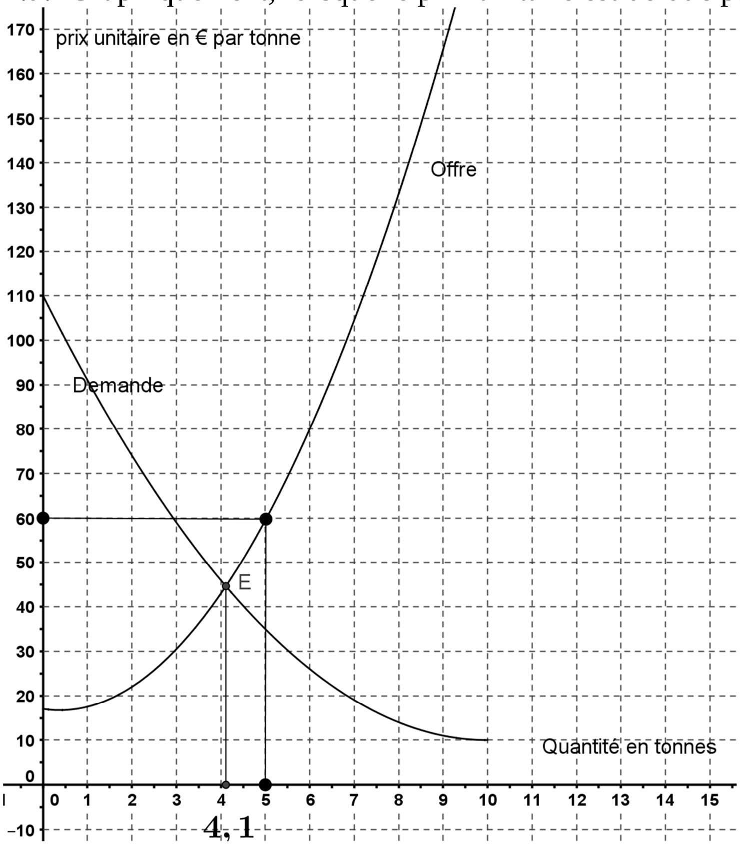
D_2 passe par le point de coordonnées (1 ; 0,5)

$f_2(x) = -0{,}06(x - 1) + 0{,}5$

$\boldsymbol{f_2(x) = -0{,}06x + 0{,}56}$

Ex2 1a) 1,5 1b) 2 2a) 1 2b) 2 2c) 1 2d) 1,5 2e) 1 3a) 1,5 3b) 2,5 3c) 1 3d) 1

1.a. **G**raphiquement, lorsque le prix unitaire est de 60€ par tonne, la quantité offerte est de **5 tonnes**



1 .b. On résout dans [0 ; 10] l'équation :

$D(q) = 26$

$q^2 - 20q + 110 = 26$

$q^2 - 20q + 84 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 84 = 64 > 0$

l'équation a deux solutions :

$q_1 = \dfrac{20 - 8}{2} = 6 \quad q_2 = \dfrac{20 + 8}{2} = 14$

La demande est de 26 euros par tonne pour une quantité de 6 tonnes.

2. a. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de la fonction offre sur [0 ; 10]

q	0	10
variations de f	17 ↗	202

2. b. Calculer $D'(q)$, puis étudier son signe sur [0 ; 10]
pour $q \in [0\,;10]$, on a : $D'(q) = 2q - 20$

valeur annulation
$2q - 20 = 0$
$2q = 20$
$q = 10$

q	0	10
$D'(q)$	$-$	0

2. c. En déduire le tableau de variation de la fonction demande sur [0 ; 10]

q	0	10
$D'(q)$	$-$	0
variations de D	110	10

2. d. Compléter le tableau de valeurs

q	0	2	4	6	7	8	9	10
$D(q)$	110	74	46	26	19	14	11	10

3. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(q) = D(q)$.
La solution de l'équation est l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.
Cette solution est environ 4,1. La quantité d'équilibre est de **4,1 tonnes.**

3. b. Par un calcul, déterminer la valeur exacte puis la valeur approchée à 0,01 tonne près de la quantité d'équilibre du marché.
on résout dans [0 ; 10] l'équation

$$f(q) = D(q)$$
$$2q^2 - 1{,}5q + 17 = q^2 - 20q + 110$$
$$2q^2 - 1{,}5q + 17 - (q^2 - 20q + 110) = 0$$
$$q^2 + 18{,}5q - 93 = 0$$

$\Delta = 18{,}5^2 - 4 \times 1 \times (-93) = 714{,}25$
L'équation a deux solutions

$$q_1 = \frac{-18{,}5 - \sqrt{714{,}25}}{2} \approx -22{,}61 \notin [0\,;10] \quad et \quad q_2 = \frac{-18{,}5 + \sqrt{714{,}25}}{2} \approx 4{,}113$$

La quantité d'équilibre du marché est 4,11 tonnes à 0,01 tonne près

3. c. Quel est alors le prix d'équilibre du marché, arrondi au centime près ?
$f(4{,}11) = 2 \times 4{,}11^2 - 1{,}5 \times 4{,}11 + 17 \approx 44{,}62$
Le prix d'équilibre du marché est 44,62 € par tonne

3. d. Calculer le chiffre d'affaires « à l'équilibre »
$CA = 44{,}62 \times 4{,}11 \approx 183$
Le chiffre d'affaires à l'équilibre sera de 183€

EXERCICE I : (7 points) *2+2+1.5+1.5*

Un magasin de téléphonie mobile a fait 400 000€ de chiffre d'affaires en 2011. L'évolution du chiffre d'affaires pour les années suivantes est donnée dans le tableau suivant.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Taux d'évolution		$+6\%$	$+5\%$	$+10\%$	$+7\%$
Chiffre d'affaires(€)	400 000				

1° $CM_{global} = 1{,}06 \times 1{,}05 \times 1{,}10 \times 1{,}07 \approx 1{,}31$

Soit une évolution globale de $+31\%$

2° $CM_{moyen\ annuel} = \left(CM_{global}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}31^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}0698$

Ainsi le taux d'évolution moyen annuel est de 6,98%

3° $CA_{2015} = CA_{2011} \times CM_{global} = 400\,000 \times 1{,}31 = 524000$

Le chiffre d'affaires en 2015 est de 524000€

4° $CA_{2016} = 570\,000$ $\qquad CA_{2015} = 524\,000$

$$CM = \frac{CA_{2016}}{CA_{2015}} = \frac{570\,000}{524\,000} \approx 1{,}088$$

Le taux d'évolution doit être de 8,8% pour que l'entreprise atteigne son objectif.

EXERCICE II : (13 points) 1° 5.5 2° 2 3° a-b : 2.5 3° c-d : 2 4° : 1

La petite entreprise Trottinetto s'est spécialisée dans la fabrication et la vente de trottinettes pour adultes, de grande qualité. On désire étudier son chiffre d'affaires.

1. Le coût total de production journalière, en euros, est donné par

$$C(x) = 8\,x^2 + 40\,x + 128$$

où x est la quantité de trottinettes fabriquées, de 0 à 10.

1. a. Calculer $C'(x)$

$C'(x) = 8 \times 2x + 40 = 16x + 40$

<u>Signe de $C'(x)$:</u>

Pour $x \in [0\,;10]$: $x \geq 0\ donc\ 16x + 40 > 0\ donc\ C'(x) > 0$

Tableau de variation de la fonction C.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 10
$C'(x)$	$+$
C	$128 \nearrow 1328$

1. b. Résoudre l'équation :

$C(x) = 320$

$8x^2 + 40x + 128 = 320$

$8x^2 + 40x - 192 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4 \times 8 \times (-192) = 7744 > 0$

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-40 - \sqrt{7744}}{16} = -8 \notin [0\,;10]$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \dfrac{-40 + \sqrt{7744}}{16} = 3$

La solution de l'équation est 3

Interprétation concrète :

Le coût de fabrication journalier est de 320€ pour une production de 3 trottinettes.

1. c. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C(x)$	128	176	240	320	416	528	656	800	960	1136	1328

1. d. Représenter la fonction C dans le repère orthogonal annexe.

2. Chaque trottinette est vendue 120 € .

2. a $R(x)$ en fonction de la quantité x de trottinettes fabriquées et vendues. : $R(x) = 120x$ en euros

Tracé : on trace le segment sur $[0\,;10]$, sachant $R(0) = 0$ $\quad R(5) = 600$ $\quad R(10) = 1200$

2. b. Le bénéfice est maximal pour une production de 5 trottinettes : écart maximal entre la courbe de R et la courbe de C.

2. c. L'entreprise réalise un profit pour une production journalière de 2 à 8 trottinettes. Droite de la recette au-dessus de la courbe des coûts

3. a. La fonction bénéfice B, en fonction de la quantité x produite

$B(x) = R(x) - C(x) = 120x - (8x^2 + 40x + 128) = -8x^2 + 80x - 128$

3. b. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.

Pour $x \in [0\,;10]$:

$B'(x) = -8 \times 2x + 80 = -16x + 80$

Valeur d'annulation : $-16x + 80 = 0$ $\quad -16x = -80$ $\quad x = 5$

x	0	5	10
$B'(x)$	$+$	0	$-$

3. c. Dresser le tableau de variation de la fonction B

x	0		5		10
$B'(x)$		+	0	$-$	
Variations de B	-128	$\nearrow$	72	$\searrow$	-128

3. d. Déterminer par le calcul, les points morts de la production. On rappelle que les points morts de la production sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$.

$B(x) = 0$

$-8x^2 + 80x - 128 = 0$

$\Delta = 80^2 - 4 \times (-8) \times (128)$ =2304

$x_1 = \frac{\left(-80 - \sqrt{2304}\right)}{-16} = 8 \quad x_2 = \frac{\left(-80 + \sqrt{2304}\right)}{-16} \ldots = 2$

L'équation a deux solutions : 2 et 8.

Les points morts de la production : 2 ou 8 trottinettes.

3. e. Valider les conjectures faites en **2.b** et **2. c.** .

On retrouve le bénéfice maximal pour une production de 5 trottinettes.

Comme la parabole représentant B est tournée vers le bas $\cap$ et sachant que $B(x) = 0$ pour $x = 2$ ou $x = 8$

On a :

x	0		2		8		10
$B(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

L'entreprise ne réalise pas de perte pour une production de 2 à 8 trottinettes.

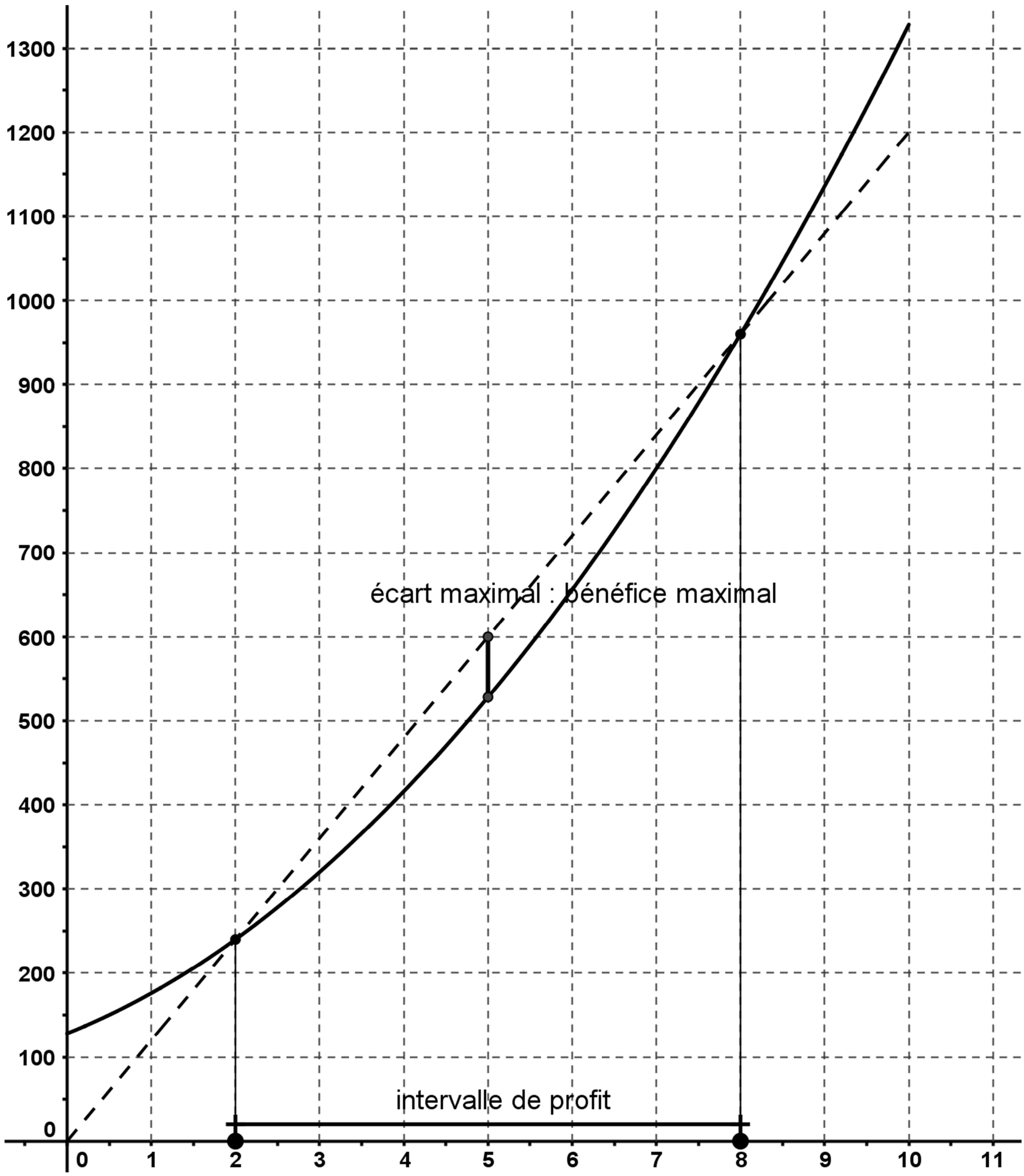
4. Pour attirer les clients, l'entreprise propose une réduction de 10 % sur le prix des trottinettes, durant une journée. Elle vend 7 trottinettes ce jour-là.

La recette étant celle définie dans la **question 2.** L'entreprise réalise-t-elle un profit ?

$R(7) \times 0{,}90 = 756$; avec la réduction, la recette pour 7 trottinettes sera de 756€

$C(7) = 800$

Si elle propose une remise de 10%, l'entreprise ne réalisera pas de profit lors de la vente de 7 trottinettes.


1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
écart maximal : bénéfice maximal
intervalle de profit

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	BTS1	1 HEURE	23/01/2017

EXERCICE I : (10 points) A : 1° : 2 2° : 2+1 3° 0.5+1+1.5 B : 2

Partie A : Le tableau ci-dessous donne les montants en euros, arrondis à l'unité, des achats effectués par les 80 clients du magasin pendant une journée ordinaire.

1. Déterminer le montant moyen $\bar{x}$ des achats à 0,1€ près et l'écart-type à 0,1 près.

D'après les fonctions statistiques de la calculatrice

$\bar{x} = 29{,}2875 \approx 29{,}3$ et $\sigma \approx 14{,}48 \approx 14{,}5$

Le montant moyen des achats est de 14,30€ et l'écart-type est de 14,5€

2. a. $[\bar{x} - \sigma\,;\ \bar{x} + \sigma] = [14{,}8\,; 43{,}8]$. On observe que : 9+10+10+10+8=47 valeurs sont dans cet intervalle.

$\frac{47}{80} \times 100 = 58{,}75$; ainsi on a $58{,}75\%$ des achats dont le montant est compris dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma\,;\ \bar{x} + \sigma]$.

2. b. Déterminer le pourcentage de clients ayant effectué des achats pour un montant ne dépassant pas 25 euros.

On observe que : 10+10+10+1=31 valeurs inférieures ou égales à 25

$\frac{25}{80} \times 100 = 38{,}75$; ainsi on a $38{,}75\%$ des achats dont le montant ne dépasse pas 25€

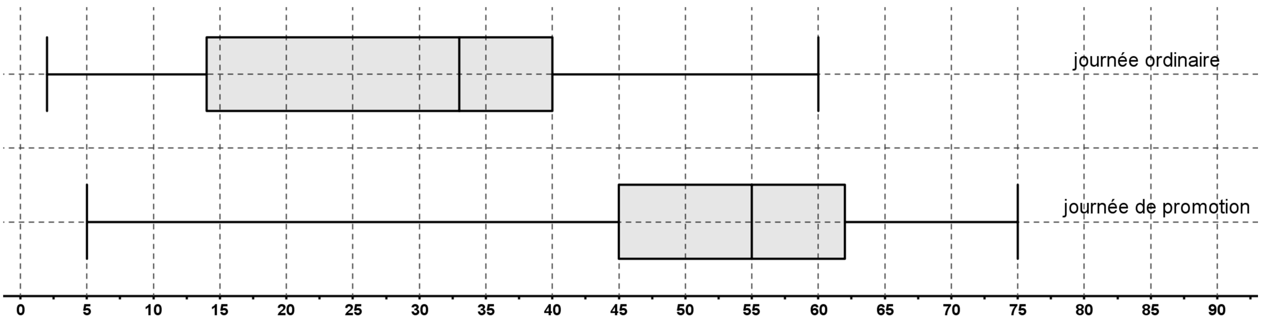
3. a. Déterminer la médiane de la série des montants d'achats donnée par le tableau ci-dessus.

Médiane : 33€ (c'est la moyenne entre la 40ème et la 41ème valeur)

3. b. Déterminer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série.

$Q_1 = 14$ et $Q_3 = 40$ (Q_1 est la 20ème valeur , Q_3 est la 60ème valeur)

3. c. Construire le diagramme en boîte de cette série au-dessus du diagramme en boîte donné.



Partie B

Alors que le tract affichait « l'occasion de dépenser moins » ; les achats ont été d'un montant plus important le jour de la promotion. Par exemple 50 % des achats étaient d'un montant supérieur à 55€, tandis que 75% des achats étaient d'un montant inférieur à 40€ le jour ordinaire.

EXERCICE II : (10 points) 1° 0,75+1.5 2° : 2 3° : 1+1+1+1.75 4° : 1

Le tableau suivant représente l'évolution du nombre d'éléphants dans une réserve, à partir de sa création en 2004.

Année	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Effectif : y_i	144	164	210	238	266	316

1° a) Compléter le nuage de points $M_i\ (x_i; y_i)$ dans le repère annexe

b) D'après les fonctions statistiques de la calculatrice

$\bar{x} = 5$ et $\bar{y} = 223$

D'où le point moyen $G(5\,; 223)$

2° Coefficient de corrélation linéaire : $R \approx 0{,}994$. Comme le coefficient de corrélation linéaire est très proche de 1, un ajustement affine est justifié.

3° On désigne par D la droite de régression de y en x.

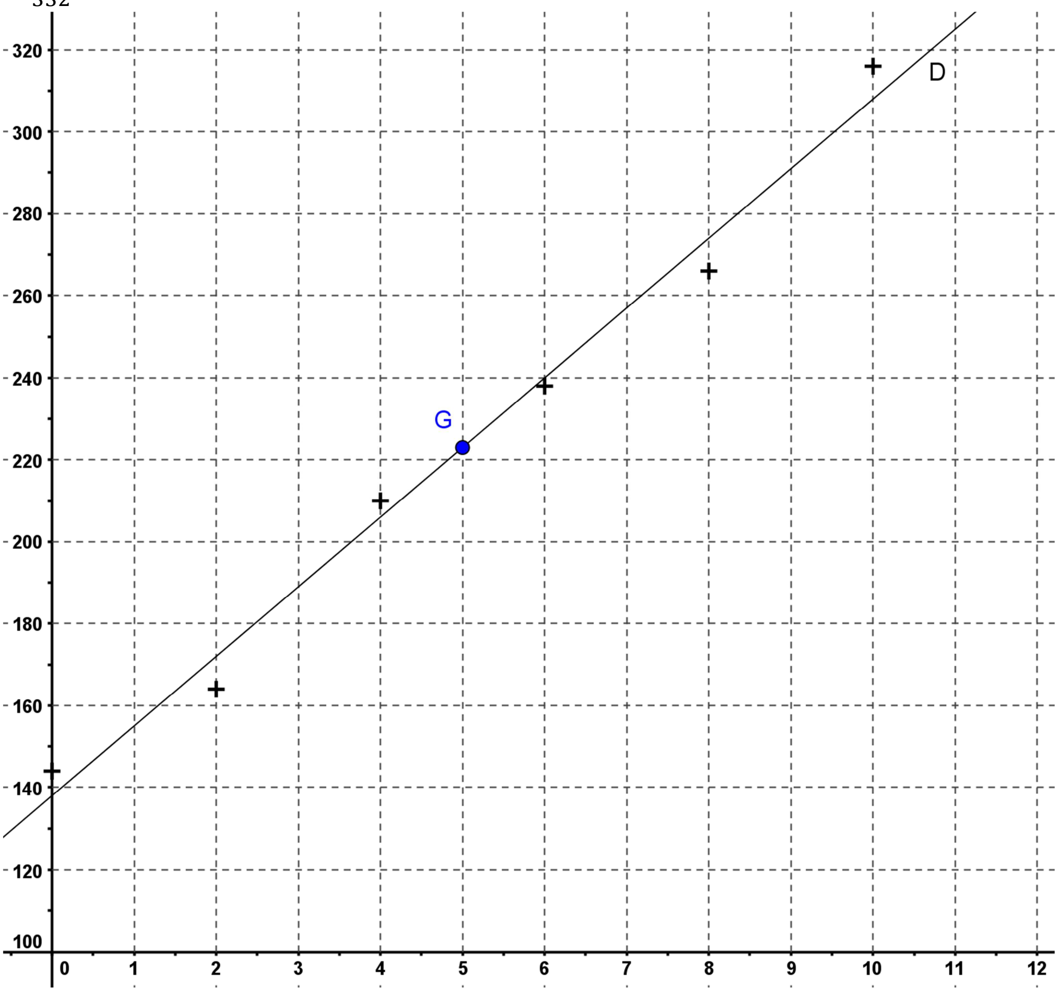
a) Déterminer une équation de la droite D. Les coefficients seront arrondis à l'unité.
$a \approx 17$ et $b \approx 138$
D'où l'équation de la droite de régression de y en x : $\boldsymbol{y = 17x + 138}$

b) Tracer D sur le graphique.
Pour $x = 10$ $y = 17 \times 10 + 138 = 30$ Pour $x = 4$ $y = 17 \times 4 + 138 = 206$

c) Calculer, à l'entier près, la prévision pour l'effectif en l'an 2016.
2016 est l'année de rang $x = 12$
Pour $x = 12$ $y = 17 \times 12 + 138 = 342$
Selon ce modèle, on peut prévoir qu'il y aura 342 éléphants dans la réserve en 2016.

d) D'après cet ajustement affine, à partir de quelle année l'effectif sera-t-il **d'au moins** 400 éléphants ?
On résout l'inéquation :
$y \geq 400$
$17x + 138 \geq 200$
$17x \geq 262$
$x \geq \dfrac{262}{17}$
$x \geq 15{,}4$
Selon ce modèle, l'effectif sera d'au moins 400 éléphants à partir de l'année de rang $x = 16$, donc en 2020.

4° L'effectif pour 2016 est maintenant connu : 332 éléphants.
Déterminer la variation en pourcentage de la valeur prévue <u>par rapport à la valeur observée.</u>
$\frac{342-332}{332} \times 100 \approx 3$ le modèle a surestimé de 3% le nombre d'éléphants en 2016.



EXERCICE I : (10 points) 1° - 2° : 3 3° : 1.5 4° : 1.5 5° : 2 6° : 2

Une entreprise fabrique et vend des panneaux solaires photovoltaïques.
La production mensuelle est comprise entre 100 et 2500 panneaux solaires.
Si x désigne le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, le bénéfice mensuel en milliers d'euros est défini par la fonction B telle que :

$$B(x) = -x^2 + 16x - 15 + 18\ln(x) \quad \text{avec } x \in [1\ ;\ 25]$$

1. Dérivée :
Pour $x \in [1\,;25]$

$$B'(x) = -2x + 16 - 0 + 18 \times \frac{1}{x} = -2x + 16 + \frac{18}{x}$$

2. a. $(-2x + 18)(x + 1) = -2x^2 - 2x + 18x + 18 = -2x^2 + 16x + 18$

2. b. En déduire que pour $x \in [1\,;25]$, on a :

$$B'(x) = -2x + 16 + \frac{18}{x} = -\frac{2x^2}{x} + \frac{16x}{x} + \frac{18}{x} = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x} = \frac{(-2x + 18)(x + 1)}{x}$$

3. Etudier le signe de $B'(x)$
Valeurs d'annulation :

- $-2x + 18 = 0$ $\quad -2x = -18$ $\quad x = 9$
- $x + 1 = 0$ $\quad x = -1$ $\quad -1 \notin [1\,;25]$
- $x = 0$ $\quad 0 \notin [1\,;25]$

x	1		9		25
$-2x + 18$		+	0	−	
$x + 1$		+		+	
x		+		+	
$B'(x)$		+	0	−	

4. Compléter le tableau de variation de la fonction B.

x	1		9		18,05		18,06		25
$B'(x)$		+	0	−					
$B(x)$	0	$\nearrow$	87,55	$\searrow$	0,07	0	$-0{,}117$	$\searrow$	$-182{,}06$

5. Le bénéfice est maximal pour une production de 900 panneaux solaires
Ce bénéfice maximal est 87550€ , arrondi à 10€ près.

6. A l'aide de la table de la calculatrice, on recherche à 1 panneau solaire près la plage de rentabilité de l'entreprise, c'est-à-dire $B(x) \geq 0$

D'après le tableau de variation, l'entreprise est rentable pour une production de 100 à 1805 panneaux solaires

EXERCICE II : (10 points)

Le tableau suivant donne le nombre de clients de téléphone mobile achetant leur forfait dans une chaîne d'hypermarchés.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nb de clients en milliers y_i	11,2	20,6	29,7	37,0	39,6	41,7	44,5	48
$f(x)$	10,3	22,7	30,0	35,1	39,1	42,4	45,1	47,5

1. Coordonnées du point moyen G :

$G(4{,}5\ ;\ 34{,}04)$

2. On souhaite réaliser un ajustement affine.

2. a. Coefficient de corrélation linéaire :

$R \approx 0{,}957$

R est proche de 1, donc un ajustement affine est pertinent.

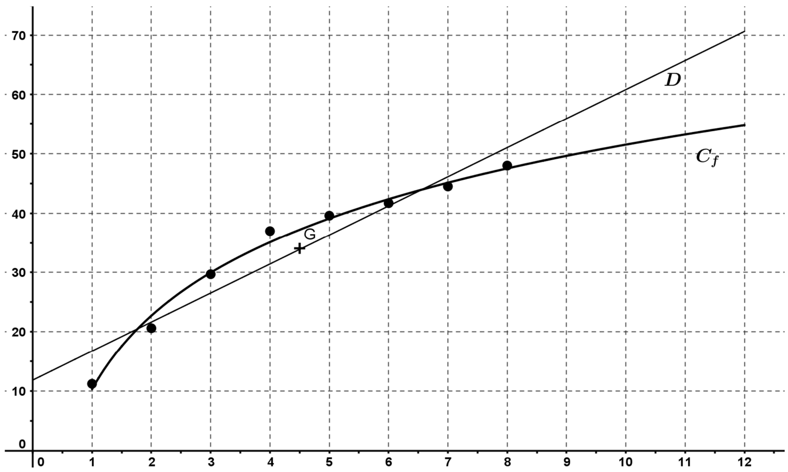
2. b. Equation de la droite de régression de y en x. Les coefficients arrondis au dixième.

$y = 4{,}9x + 11{,}8$

2. c. **T**racé :

Pour $x = 0$, $y = 11{,}8$

Pour $x = 8$, $y = 4{,}9 \times 8 + 11{,}8 = 51$



2. d. 2016 est l'année de rang $x = 11$. Pour $x = 11$, $y = 4{,}9 \times 11 + 11{,}8 = 65{,}7$

Selon ce modèle, on peut prévoir 65700 clients en 2016.

3. Une étude plus approfondie conduit à un nouvel ajustement par la représentation d'une fonction f définie sur [1 ; 12] par $f(x) = 17{,}9\ln(x) + 10{,}3$

3. a. Pour $x \in [1\,;12]$

$$f'(x) = 17{,}9 \times \frac{1}{x} + 0 = \frac{17{,}9}{x}$$

<u>Signe de $f'(x)$:</u>

$x > 0$ et $17{,}9 > 0$ donc $\frac{17{,}9}{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

3. b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	1	12
$f'(x)$		
$f(x)$	10,3 ↗	54,78

4. Les chiffres sont désormais connus pour l'année 2016, la chaîne a enregistré 55000 clients. Quel est l'ajustement le plus pertinent pour l'année 2016 ? Justifier par un calcul approprié.

2016 est l'année de rang $x = 11$

Pour $x = 11$, $f(x) = 17{,}9 \times \ln(11) + 10{,}3 \approx 53{,}22$

Selon ce modèle, on peut prévoir 53220 clients en 2016.

$55000 - 53220 = 1780$ $\quad$ $65700 - 55000 = 10700$

Le deuxième modèle prévoyait une valeur plus proche de la réalité, il semble donc plus pertinent.

<u>CC 27/03/2017 1heure</u>

<u>EXERCICE I :</u> <u>(10 points)</u>

Partie 1 : 1° : 0.5 2° :1.5 3° : 1 Partie 2 : 1° :1 2° : 1 +1.5 3° : 1.5+2

Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs.

On désigne par *x* le nombre de centaines de sacs fabriqués par jour dans l'entreprise. La production est limitée à 1000 sacs par jour.

Le coût de fabrication de *x* centaines de sacs, exprimé en centaines d'euros, est donné par :

$C(x) = 2x + e^{0,5x}$

Chaque sac est vendu 10 euros, on note *R*(*x*) la recette, exprimée en centaines d'euros, correspondant à la vente de *x* centaines de sacs. On a $R(x) = 10x$.

Partie 1 : Lecture graphique

On donne ci-contre les représentations graphiques des fonctions *C* et *R*.

1. Parmi ces deux représentations graphiques, quelle est celle de la fonction *R* ?

La fonction R est une fonction linéaire, donc elle est représentée par la droite.

2. À l'aide du graphique, recopier et compléter le tableau suivant :

x	2,8	4	8
$C(x)$	10	15	70
$R(x)$	28	40	80

3. L'entreprise est certaine d'être bénéficiaire, lorsque la recette est supérieure aux coûts, cela se produit pour une production d'au minimum 100 sacs et au maximum 800 sacs, <u>arrondi à la centaine de sacs</u>,

Partie 2 :

On note *B*(*x*) le bénéfice journalier, exprimé en centaines d'euros réalisé par l'entreprise.

1. Montrer que $B(x) = 8x - e^{0,5x}$

$B(x) = R(x) - C(x) = 10x - (2x + e^{0,5x}) = 10x - 2x - e^{0,5x} = 8x - e^{0,5x}$

2. a. Calculer $B'(x)$.

$B'(x) = 8 - 0,5e^{0,5x}$

2. b. Montrer que la valeur d'annulation de $B'(x)$ est : $2\ln(16)$

$B'(x) = 0$

$8 - 0,5e^{0,5x} = 0$

$-0,5e^{0,5x} = -8$

$e^{0,5x} = \dfrac{-8}{-0,5}$

$e^{0,5x} = 16$

$0,5x = \ln(16)$

$x = 2\ln(16)$

3. On admet que

$B'(x) < 0$ lorsque $x > 2\ln(16)$ et $B'(x) > 0$ lorsque $x < 2\ln(16)$

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction *B* sur [0 ; 10].

x	0		$2\ln(16)$		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-1	$\nearrow$	$28,36$	$\searrow$	$-68,41$

3. b. $2\ln(16) \approx 5,54$, donc pour obtenir un bénéfice maximal, il faut produire 550 sacs, arrondi à 10 sacs ; le bénéfice maximal de 2836€, à l'euro près.

EXERCICE II : (10 points) A : 1° 1 2° :1+1 TC : 0.5 B : 1° : 1.5 2a : 1 2b : 1 3a 1.5 3b : 1.5

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue. L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\ ;\ 3{,}6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

$$B(x) = -5 + (4 - x)e^x$$

Partie A : étude graphique

1° Le bénéfice sera supérieur ou égal à 13 000 euros pour un nombre de poulies compris entre 2500 et 3400 poulies, arrondies à la centaine de poulies ; on lit les abscisses des points de C ayant une ordonnée supérieure ou égale à 13.

2° Le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est d'environ 15 000€ pour 3000 poulies fabriquées et vendues.

Partie B : étude théorique

Dérivée : Pour tout x de [0 ; 3,6] $B'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^x(3 - x)}$

1. signe de $B'(x)$

Valeur annulation :

$3 - x = 0$

$x = 3$ e^x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

x	0		3		3,6
e^x		+		+	
$3-x$		+	0	−	
$B'(x)$		+	0	−	

$e^x > 0$

2. a. Tableau de variation

x	0	0,301	0,302		3		3,6
$B'(x)$				+	0	−	
$B(x)$	-1 ↗	-0,0019	0,001	13 ↗	15,086	↘ 13	↘ 9,64

2. b. Le bénéfice maximum est de 15086€, à 1€ près.

3. a. A partir de combien de poulies, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

Le tableau de signe complété permet de déduire que l'entreprise réalise un bénéfice à partir de 302 poulies produites par semaine

3. b. On veut affiner la réponse à la question A.1.a. Retrouver l'intervalle à 1 poulie près

$B(2{,}455) \approx 12{,}994 < 13$ et $B(2{,}456) \approx 13{,}00008 \geq 13$

$B(3{,}398) \approx 13{,}002 > 13$ et $B(3{,}399) \approx 12{,}99 < 13$

En reportant ces valeurs dans le tableau de variation, on a $B(x) \geq 13$ pour $x \in [2{,}456\ ;\ 3{,}398]$

Ainsi, l'entreprise doit donc produire de 2456 à 3398 poulies pour obtenir un bénéfice supérieur ou égal à 13000€

EXERCICE I : (2,5 points)

La feuille de calcul donne la répartition des dépenses suivant le compte payeur d'un couple, Léna et Thierry.

1. a. Créer un tableau dynamique croisé donnant les dépenses de chaque compte payeur par poste de dépenses.

Somme de MONTANT	**Compte payeur**		
Postes	**LENA**	**THIERRY**	**Total général**
ALIMENTATION	2819,81	4627,65	7447,46
ASSURANCES	388,4	859,9	1248,3
DIVERS	951,74	783,26	1735
ENFANTS	4513,21	81,78	4594,99
EPARGNE		1276,36	1276,36
HABILLEMENT	767,88	529,84	1297,72
IMPOTS		3453,9	3453,9
LOGEMENT	1089	17015,3	18104,33
LOISIRS	577,78	3364,57	3942,35
MUTUELLE		1500,36	1500,36
VOITURE	1363,55	3025,51	4389,06
Total général	**12471,37**	**36518,5**	**48989,83**

1. b. Quel est le montant total des dépenses de chacun ?

Léna : 12471,37€

Thierry : 36518,46€

1. c. Quels sont les postes pour lesquels, Léna dépense plus que Thierry ?

Postes : Divers - Enfants - habillement

2. a. Créer un tableau dynamique croisé donnant pour chacun les parts en pourcentage selon le poste de dépenses.

Somme de MONTANT	**Compte payeur**		
Postes	**LENA**	**THIERRY**	**Total général**
ALIMENTATION	22,61%	12,67%	15,20%
ASSURANCES	3,11%	2,35%	2,55%
DIVERS	7,63%	2,14%	3,54%
ENFANTS	**36,19%**	0,22%	9,38%
EPARGNE	0,00%	3,50%	2,61%
HABILLEMENT	6,16%	1,45%	2,65%
IMPOTS	0,00%	9,46%	7,05%
LOGEMENT	8,73%	46,59%	36,96%
LOISIRS	4,63%	9,21%	8,05%
MUTUELLE	0,00%	4,11%	3,06%
VOITURE	10,93%	8,28%	8,96%
Total général	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

2. b. Quel pourcentage de ses dépenses, Léna consacre-t-elle aux enfants ? 36,19%

<u>EXERCICE II :</u> <u>(7,5 points)</u>

Ouvrir le fichier Excel 2017 05 BTS1 BTS Blanc onglet : exercice II

Eric, en reconversion d'activité, développe une nouvelle formule de restauration rapide, en ouvrant son établissement uniquement le midi.
Au cours d'un mois où il teste sa nouvelle activité, il a totalisé 600 repas servis.

Les trois parties sont indépendantes

Partie A

Tous les résultats de la partie A seront arrondis à l'unité.

Afin de prévoir son approvisionnement, Eric estime que, à la suite de ses efforts de publicité, le nombre de repas servis mensuellement augmentera de 15% tous les mois.

On note u_0 le nombre de repas servis durant le mois de test, $u_0 = 600$; u_1 le nombre de repas servis durant le premier mois d'exploitation, et u_n le nombre de repas servis au cours du *n*-ième mois.

1. Calculer u_1

$u_1 = 600 \times 1{,}15 = 690$

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) ? Quelle est sa raison ?

- Le nombre de repas servis mensuellement augmentera de 15% tous les mois :
  $u_{n+1} = 1{,}15\, u_n$
- La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}15$

3. Exprimer u_n en fonction de *n*.

$u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = 600 \times 1{,}15^n$

4. a. Calculer le nombre de repas prévus le sixième mois d'exploitation.

$u_6 = 600 \times 1{,}15^6 \approx 1388$

Il servira 1388 repas le 6ème mois d'exploitation

4. b. Calculer le nombre de repas prévus le dix-huitième mois d'exploitation.
Ce nombre vous parait-il réaliste ? Justifier.

$u_{18} = 600 \times 1{,}15^{18} \approx 7425$

Selon ce modèle, il servirait 7425 repas le 18ème mois d'exploitation, ce qui paraît peu probable

5. En complétant la feuille de calcul Excel, déterminer le nombre total de repas servis, et le bénéfice réalisé depuis le mois test jusqu'à la fin du 6ème mois d'exploitation.

Nombre total de repas : 1388 repas

Le bénéfice est de 5€ par repas. Déterminer le bénéfice réalisé durant cette période.

Bénéfice réalisé : 6940€

Partie B

Compte tenu des limites imposées par la taille de son restaurant, Eric étudie une autre estimation du nombre de repas servis le *x*-ième mois. Elle est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = 2000 - 1400e^{-0{,}14x}$$

pour *x* compris dans l'intervalle [0 ; 18].

1. Montrer que $f'(x) = 196e^{-0{,}14x}$

$f'(x) = 0 - 1400 \times (-0{,}14^{-0{,}14x}) = 196e^{-0{,}14x}$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle [0 ; 18].

$e^{-0{,}14x} > 0$ donc $196e^{-0{,}14x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

3. Dresser le tableau de variations de f.

x	0	13	14	18
$f'(x)$		+		
$f(x)$	600	1773	1803	1887,36

4. Selon cette nouvelle estimation, combien de repas le gérant prévoit-il de vendre le dix-huitième mois ? (arrondir à l'entier le plus proche)

$f(18) \approx 1888$

Selon cette estimation, il servirait : 1888 repas le 18$^{\text{ème}}$ mois

5. A partir de quel mois dépassera-t-il les 1 800 repas mensuels ?
On fera apparaître les valeurs utiles dans le tableau de variation.
Selon cette estimation, il dépassera 1800 repas mensuels le 14$^{\text{ème}}$ mois.

Partie C : Financement de l'activité

Partie C : Financement de l'activité

Eric doit disposer de 75000€ pour démarrer son activité.

Quatre ans auparavant, il avait étudié deux financements possibles.

1. Quelle somme, à1€ près, devait-il placer pendant 4 ans au taux annuel de 4,5% pour obtenir ces 75000€ ?

$VA = VC \times (1{,}045)^{-4} \approx 62892$

Il doit placer 62892€

Pour obtenir un capital de 75000€ dans 4 ans.

2. Eric a anticipé et a choisi de payer 18000€ par an, 4 fois de suite, au taux annuel de 3%. (Le dernier versement ayant lieu au moment du démarrage de l'activité). La valeur acquise totale lui permettra-t-elle de d'obtenir les 75000€ nécessaires au démarrage de son activité ?

On applique $V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ avec $a = 18000$ $\quad i = 0{,}03 \quad n = 4$

$$V = 18000 \times \frac{1{,}03^4 - 1}{0{,}03} \approx 75305 \text{ €}$$

La valeur acquise est supérieure à 75000€, cela lui permettrait de démarrer son activité.

<u>Annexe – Formulaire :</u> On verse n annuités constantes a au taux annuel de t%. On pose $i = \frac{t}{100}$.

Avec les notations utilisées en cours :

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad a = V_n \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad V_A = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$