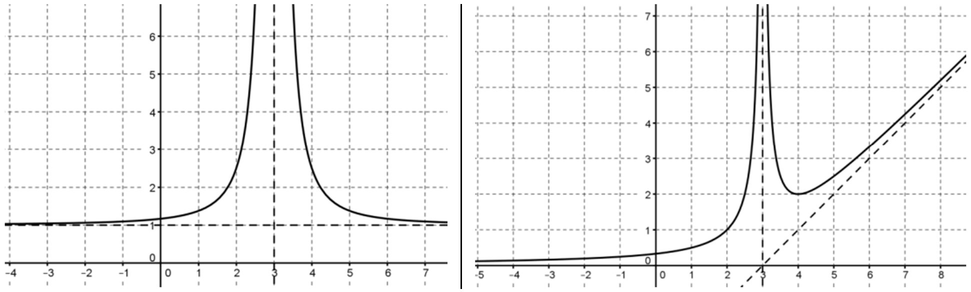
Ex1 : On donne la courbe de deux fonctions f et g définies sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.
Par lecture graphique, déterminer les limites aux bornes ouvertes de l'ensemble de définition, puis dresser le tableau de variation. Préciser les éventuelles asymptotes.



Ex2 : On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° a) Calculer la limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D d'équation $y=3$.

☺ On calculera $f(x)-3$, puis on étudiera le signe de $f(x)-3$.

2° a) Déterminer la dérivée, et montrer que $f'(x)=\frac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

3° Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

Ex3 : On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$
De plus, on sait : C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse 2 et 5
La droite d'équation $y=x-6$ est asymptote à C_f en $+\infty$.
Tracer les asymptotes et une courbe possible

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Ex4 : (d'après ex171p90)

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par

$$f(x)=x-2+\frac{4}{x+2}$$

1° Montrer que la droite D d'équation $y=x-2$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f

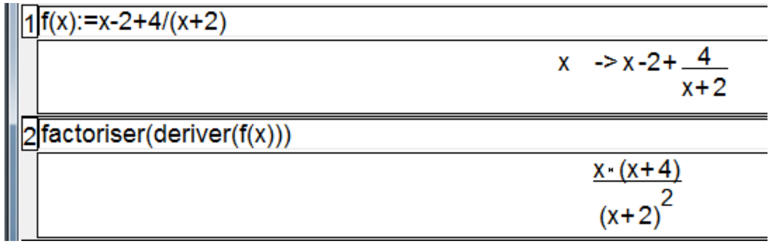
2° Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

3° Démontrer que $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

4° Compléter la figure avec les asymptotes.

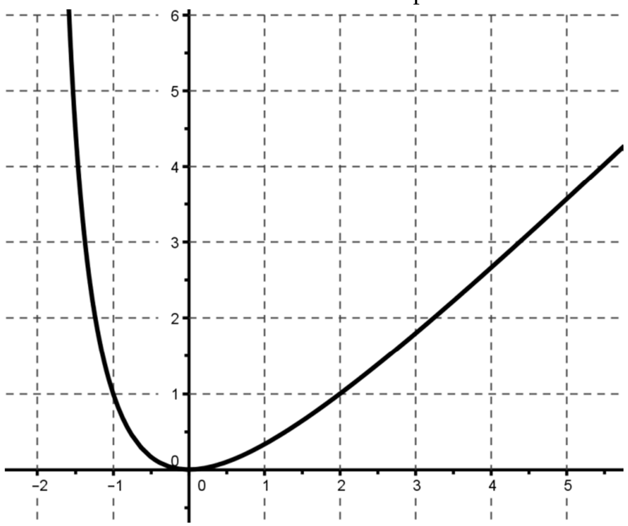
5° On donne



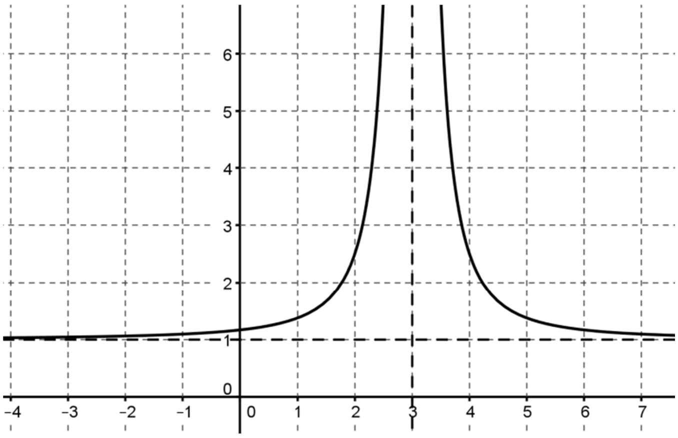
a) Calculer $f'(x)$ pour $x\in]-2\,;+\infty[$ et retrouver le résultat donné par un logiciel de calcul formel.

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

6° Dresser le tableau de variation complet.



Ex2 : On donne la courbe de deux fonctions f et g définies sur $]-\infty ; 3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.
Par lecture graphique, déterminer les limites aux bornes ouvertes de l'ensemble de définition, puis dresser le tableau de variation. Préciser les éventuelles asymptotes.



<u>Limites</u> :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 10$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$

<u>Asymptotes</u> :

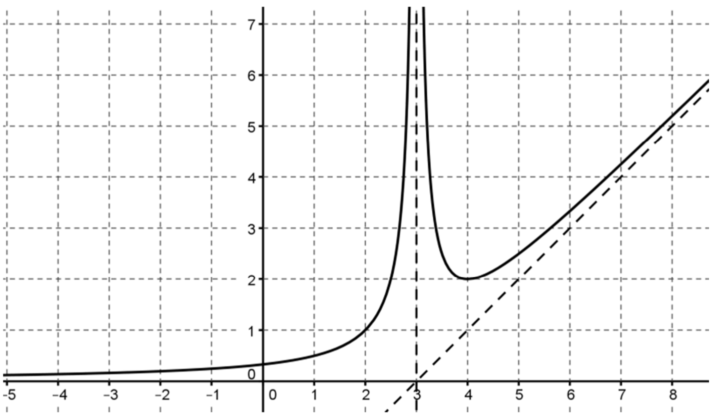
la droite d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$;

la droite d'équation $x = 3$

<u>Tableau de variations</u> :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

2°



<u>Limites</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$

<u>Asymptotes</u> : la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$; la droite d'équation $y = x - 3$ en $+\infty$; la droite d'équation $x = 3$

<u>Tableau de variations</u> :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ex2 : On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

1° a) Calculer les limites en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

f est une fonction rationnelle,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

et la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à C_f (en $+\infty$)

b) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D d'équation $y = 3$.

On calcule :

$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} - 3 = \frac{3x^2 + 4x + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

On étudie le signe :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$4x$ $x^2 + 1$	0 $\qquad$ $+$ $\qquad$ $+$
$f(x) - 3$	0 $\qquad$ $+$

D'où C_f est au-dessus de D sur $]0\ ;\ +\infty[$

C_f coupe D au point d'abscisse 0

2° Dérivée :

Pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$

$u(x) = 3x^2 + 4x + 3 \qquad u'(x) = 6x + 4$

$v(x) = x^2 + 1 \qquad v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{(6x + 4) \times (x^2 + 1) - 2x \times (3x^2 + 4x + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 4x^2 + 6x + 4 - 6x^3 - 8x^2 - 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

De plus $4(1 - x)(1 + x) = 4(1 + x - x - x^2) = 4(1 - x^2) = 4 - 4x^2$

D'où

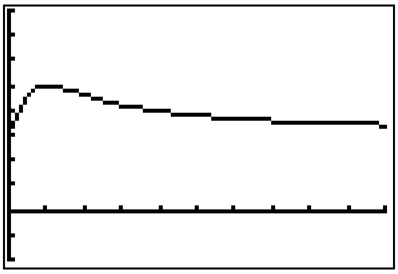
$$f'(x) = \frac{4(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

2° b) Signe de $f'(x)$

x	0	1	$+\infty$
4 $1-x$ $1+x$ $(x^2+1)^2$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$

3° Tableau de variation de la fonction f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	3



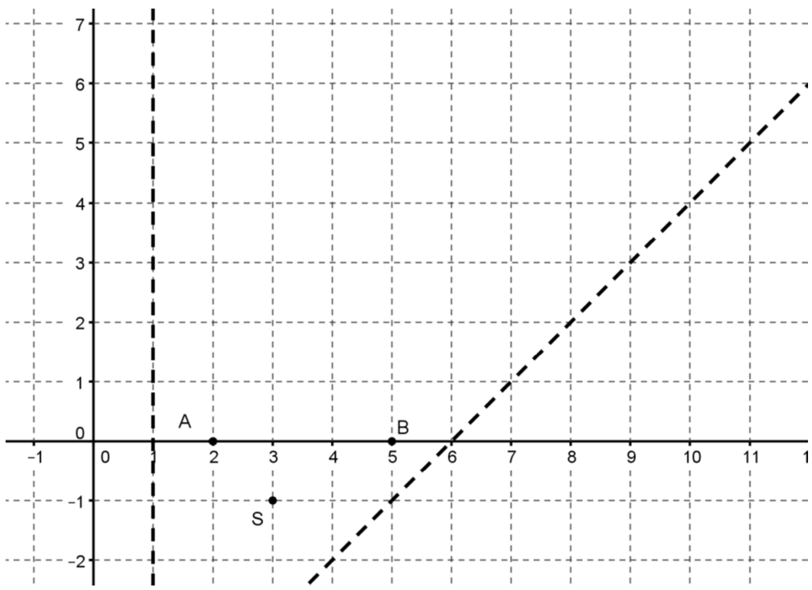
Ex3 : On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$

De plus, on sait que : C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse 2 et 5

La droite d'équation $y = x - 6$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

Tracer les asymptotes et une courbe possible

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



Ex4 : (d'après ex171p90)
Soit f la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

1° Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.
Ecart :

$$f(x) - (x-2) = \frac{4}{x+2}$$

Limite en $+\infty$ de l'écart :

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty \quad donc \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-2)\big) = 0$$

Ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$

2° Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

x	-2 $+\infty$
$\frac{4}{x+2}$	
$f(x)-(x-2)$	‖ +

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$

3° Démontrer que $\lim_{x\to-2} f(x) = +\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

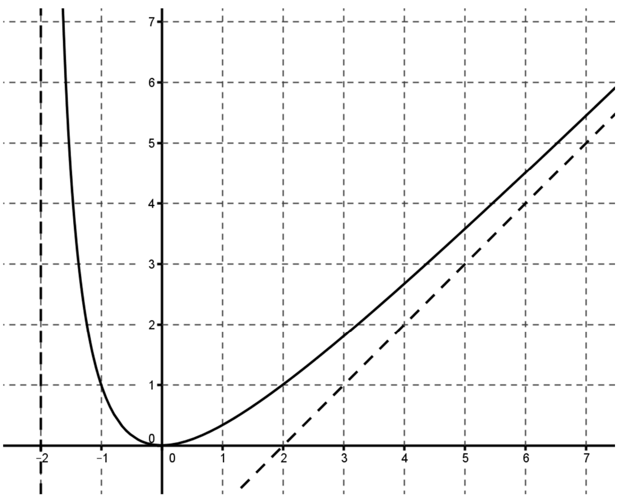
$\star$ $\lim_{x\to-2}(x+2) = 0 \quad et$ $\qquad donc \quad \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{4}{x+2} = +\infty$

$\star$ $\lim_{x\to-2}(x-2) = -4$

D'où $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right) = +\infty$

Ainsi $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$ et la droite D d'équation $x = -2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

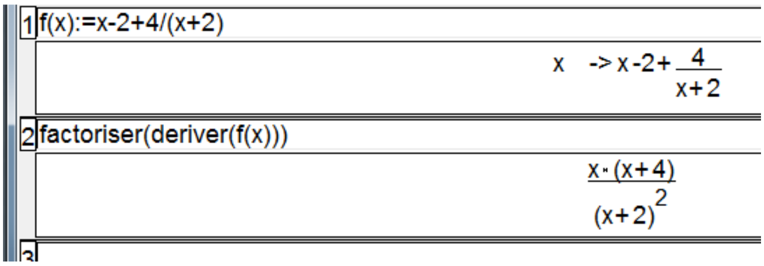
4° Compléter la figure avec les asymptotes.



5° a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-2\,;+\infty[$ et retrouver le résultat donné par un logiciel de calcul formel.

b) Etudier le signe de $f'(x)$

6° Dresser le tableau de variation complet.



5° a) dérivée

Pour $x \in]-2\,;+\infty[$

$$f'(x) = 1 - 4 \times \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$= 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2 - 4}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(x+2) - 4}{(x+2)^2}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

b) signe de $f'(x)$

x	-2		0		$+\infty$
x $x+4$ $(x+2)^2$					
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

6° tableau de variation

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice supplémentaire

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

1° Démontrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2° a) limite en $+\infty$

b) Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f

3° a) Calculer $f'(x)$ pour $\in]1\,;+\infty[$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

4° Dresser le tableau de variation complet.

1° Démontrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}=x^2\times\frac{1}{x-1}$$

$\star\ \lim\limits_{x\to 1} x^2=1$

$\star\ \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0\quad et$ $\qquad donc\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{x-1}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2\times\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$ et la droite D d'équation $x=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2° a) limite en $+\infty$

b) Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f

a) f est une fonction rationnelle

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

b) pour $x\in]1\,;+\infty[$

$$f(x)-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\cdots=\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\ \ donc\ \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

Ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$

3° a) Calculer $f'(x)$ pour $\in]1\,;+\infty[$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

3° a) dérivée

Pour $x \in]1\,;+\infty[$

$u(x) = x^2$

$v(x) = x - 1$

$$f'(x) = \frac{2x \times (x-1) - 1 \times x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

b) signe de $f'(x)$

x	1		2		$+\infty$
x					
$x-2$					
$(x-1)^2$					
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4° tableau de variation

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice Soutien BTS Blanc

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 4 + \frac{8}{x}$$

1° Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2° a) Limite en $+\infty$

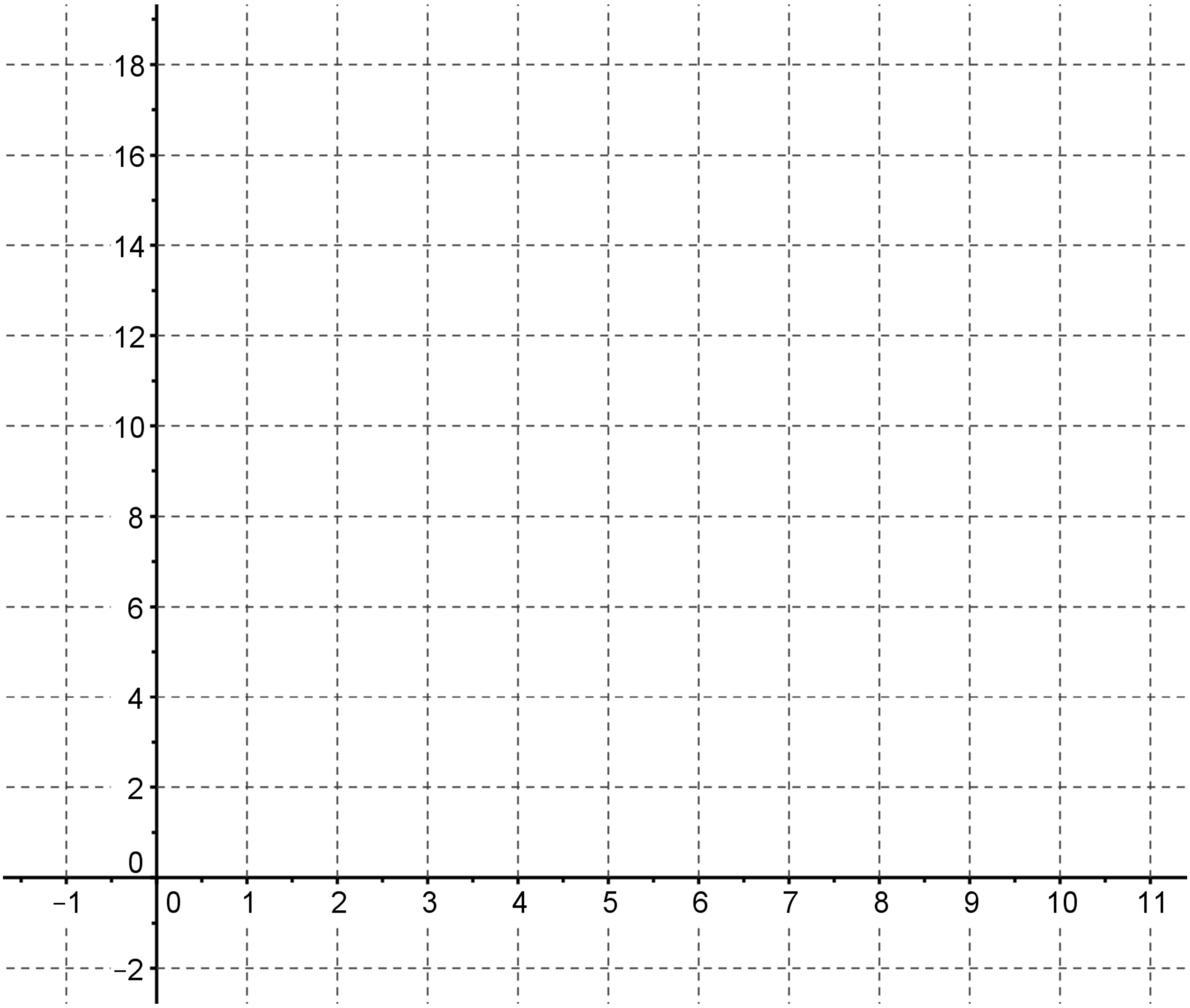
b) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f

3° a) Calculer $f'(x)$ pour $\in]0\,;+\infty[$. On montrera que $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

4° Dresser le tableau de variation complet.

5° Représenter dans le repère ci-dessous les asymptotes et la courbe représentative de la fonction f



$f(x) = 2x - 4 + \dfrac{8}{x}$

1° Démontrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

⋆ $\lim_{x\to 0} (2x-4) = -4$

⋆ $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{8}{x} = +\infty$

Ainsi $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et la droite D d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2° a) limite en $+\infty$

⋆ $\lim_{x\to +\infty} (2x-4) = +\infty$

⋆ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0$

Ainsi $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f

pour $x \in]0\,;+\infty[$

$$f(x) - (2x-4) = \left(2x - 4 + \frac{8}{x}\right) - (2x-4) = \frac{8}{x}$$

$on\ a\ vu:\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0\ \ donc\ \ \lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - (2x-4)\big) = 0$

Ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 4$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$

3° a) Calculer $f'(x)$ pour $\in]0\,;+\infty[$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

3° a) dérivée

Pour $x \in]0\,;+\infty[$

$$f(x) = 2x - 4 + \frac{8}{x} = 2x - 4 + 8 \times \frac{1}{x}$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \qquad u'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2 + 8 \times \frac{-1}{x^2} = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

De plus $2(x-2)(x+2) = 2(x^2 - 2x + 2x - 4) = 2(x^2 - 4) = 2x^2 - 8$

D'où

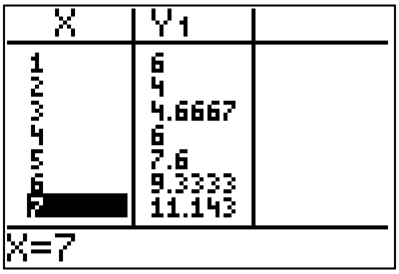
$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$$

b) signe de $f'(x)$

x	0		2		$+\infty$
2		$+$		$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4° tableau de variation

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$



X	Y_1
1	6
2	4
3	4.6667
4	6
5	7.6
6	9.3333
7	11.143

X=7