

1. Pondichéry Avril 2013

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{-x^2}$ est une primitive de la fonction f définie par :

A : $f(x) = -xe^{-x^2}$ B : $f(x) = -2xe^{-x^2}$ C : $f(x) = xe^{-x^2}$ D : $f(x) = e^{-2x}$

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (7x - 23)e^x$. L'équation $h(x) = 0$:

A : a pour solution 2,718 B : a une solution sur $[0 ; +\infty[$
C : a deux solutions sur $\mathbb{R}$ D : a une solution sur $] -\infty ; 0]$

3. On pose $I = \int_0^1 3e^{3x} dx$. On peut affirmer que :

A : $I = e^3 - 1$ B : $I = 3e^3 - 3$ C : $I = 19,1$ D : $I = 1 - e^3$

4. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

A : $] -\infty ; +\infty[$ B : $[0 ; +\infty[$ C : $] -\infty ; 0]$ D : $[-3 ; 3]$

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L.

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.

L'enquête révèle que 55% des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95% sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10% sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.

3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.

4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé.

En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Le 1er janvier 2000, un client a placé 3 000 (à intérêts composés au taux annuel de 2,5%.

On note C_n le capital du client au 1er janvier de l'année 2000 + n , où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir les résultats au centime d'euro.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a la relation : $C_n = 3000 \times 1,025^n$

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3 000
Traitement	Affecter à n la valeur 0. <i>Initialisation</i> Affecter à U la valeur 3 000 <i>Initialisation</i> Tant que $U \leq S$ n prend la valeur $n + 1$ U prend la valeur $U \times 1,025$ Fin tant que
Sortie	Afficher le nombre $2000 + n$

a. Pour la valeur $S = 3300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1		
Valeur de U	3000			
Condition $U \leq S$	Vrai			

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3 300.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.

4. Au 1er janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1er janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

PARTIE A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $f(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$

1. Montrer que $f'(x) = xe^{-x}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.

3. On admet que la fonction F définie sur $[0 ; 6]$ par $F(x) = x + (x + 2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0 ; 6]$.

Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $\int_0^6 f(x)dx$.

PARTIE B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.

x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.

$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.

2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

PARTIE C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?

2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01? Justifier votre réponse.

2. Amérique du Nord juin 2013

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Recopier pour chaque question la réponse exacte, on ne demande pas de justification.

Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

- a. $-e^{\frac{1}{a}}$ b. $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ c. $\frac{1}{e^a}$ d. e^a

2. Pour tout réel a , le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

- a. $\sqrt{e^a}$ b. $\frac{e^a}{2}$ c. $\frac{e^a}{e^2}$ d. $e^{\sqrt{a}}$

3. Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ est égal à :

- a. $\ln(x)$ b. $-\ln(-x)$ c. $-\ln(x)$ d. $\frac{1}{\ln(-x)}$

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

La dérivée de f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

- a. $f'(x) = 1$ b. $f'(x) = \ln(x)$ c. $f'(x) = \frac{1}{x}$ d. $f'(x) = \ln(x) + 1$

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10⁻³ près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X , qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75% des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.

Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95%.

c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

EXERCICE 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.

Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$

2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.

Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables :

U, N

Initialisation :

Mettre 42 dans U

Mettre 0 dans N

Traitement :

Tant que U < 100

U prend la valeur $U \times 0,95 + 6$

N prend la valeur $N + 1$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher N.

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.

On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$.

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n , par $w_n = v_n - 80$

Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0,95)^n$.

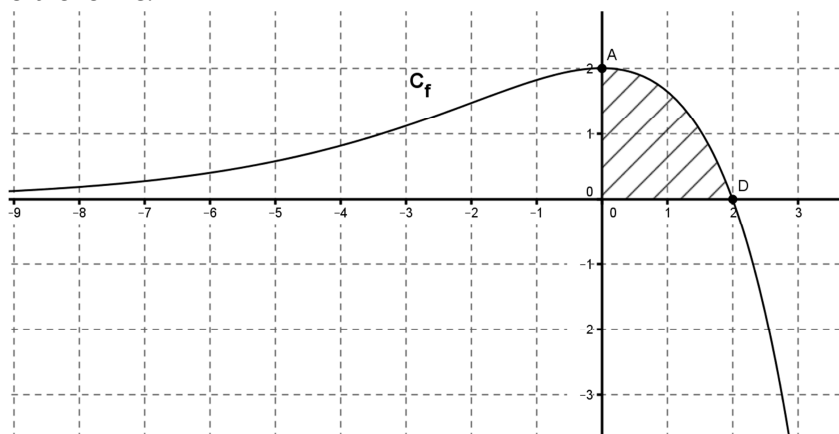
3. a. Déterminer la limite de (w_n)

3. b. En déduire la limite de (v_n)

3. c. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0 ; 2)$ et $D(2 ; 0)$ appartiennent à la courbe C_f .
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

2. Calculer $f'(x)$.

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B : On admet que $f(x) = (-x + 2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$ est comprise entre 2 et 4.

2. a. On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x + 8)e^{0,5x}$.

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x)dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$

Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G .

Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

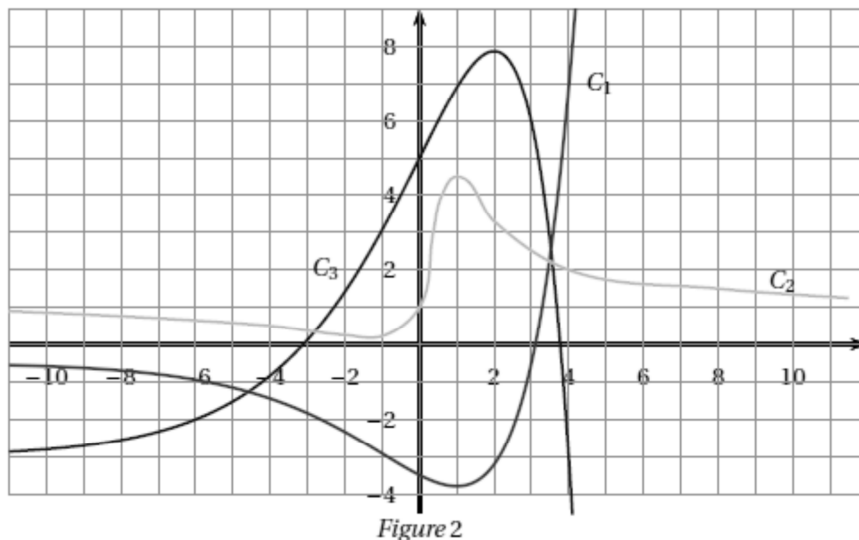


Figure 2

3. Antilles Juin 2013

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

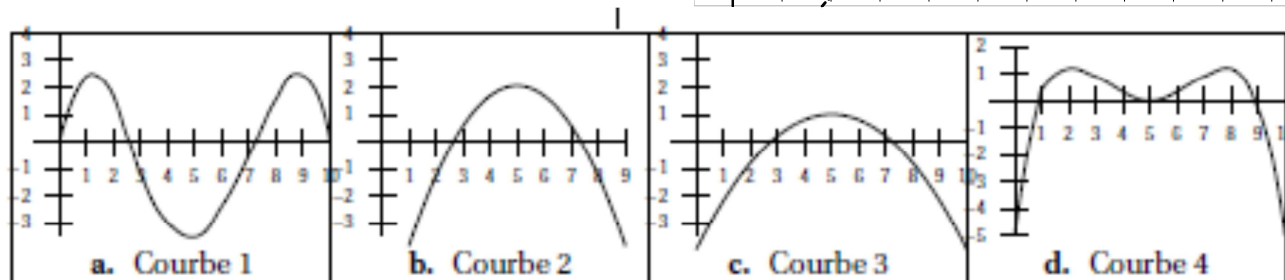
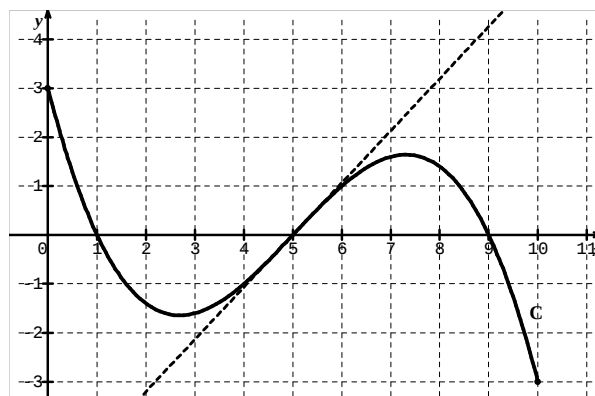
Barème : une bonne réponse rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.

1. Une augmentation de 20% suivie d'une augmentation de 15% est équivalente à une augmentation globale de : a. 17,5% b. 30% c. 35% d. 38%

2. On donne ci-contre la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $[0 ; 10]$.

La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée.

Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction .



3. Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et f' sa fonction dérivée. On a :

- a. $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$ b. $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ c. $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ d. $f'(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$

4. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1,05$.
La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par :

- a. $S = 2 \times \frac{1-1,05^{12}}{1-1,05}$ b. $S = 2 \times \frac{1-1,05^{13}}{1-1,05}$ c. $S = 1,05 \times \frac{1-2^{13}}{1-2}$ d. $S = 1,05 \times \frac{1-2}{1-2^{12}}$

5. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 22 et d'écart-type 3.
Une valeur approchée à 10^{-2} de la probabilité de l'évènement $\{X \in [22 ; 28]\}$ est :

- a. 0,2 b. 0,28 c. 0,48 d. 0,95

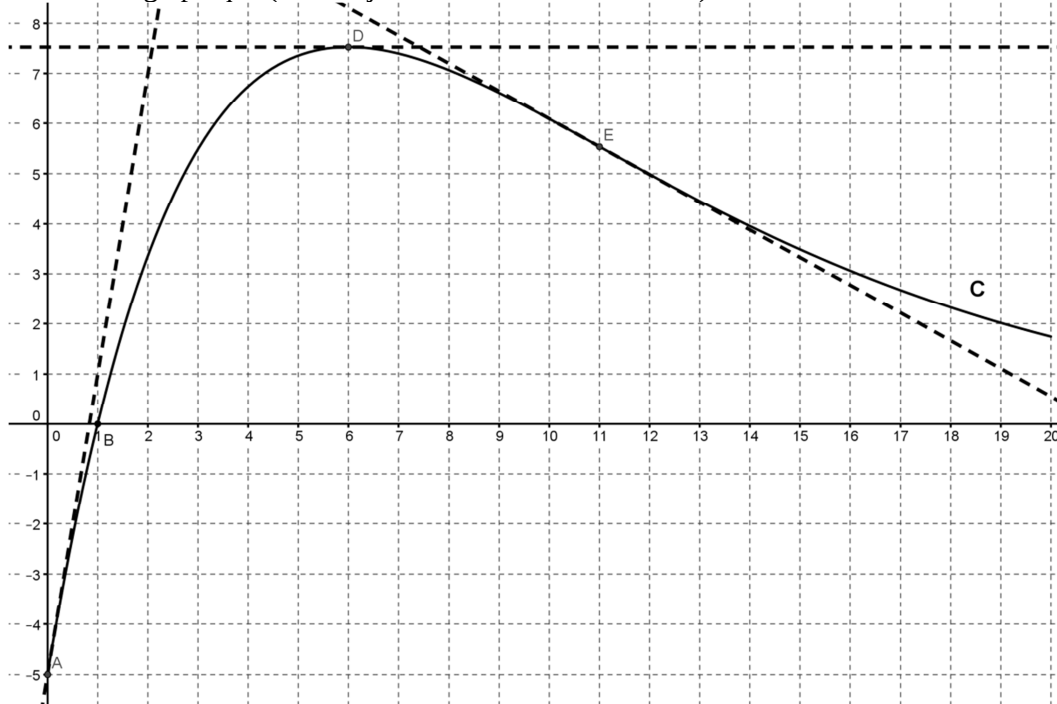
EXERCICE 2 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :



- Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
- Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
- Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \int_4^8 f(x) dx$.
- Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$.
Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B : La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x}$

- Montrer que $f'(x) = (-x + 6)e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.
- a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 20]$.
b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
- Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0 ; 6]$.
Donner la valeur arrondie au millièm de α .
- a. Montrer que la fonction F définie sur $[0 ; 20]$ par $F(x) = (-25x - 100)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0 ; 20]$.
b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4 ; 8]$. Donner sa valeur exacte.

Partie C : Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0 ; 20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6 ; 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 €? (Arrondir à l'unité).

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.

Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes, et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produit, le rayon informatique propose une extension de garantie.

Le responsable constate que 28% des acheteurs ont opté pour une tablette, et 48% pour un ordinateur portable.

Dans cet exercice, on suppose que chaque acheteur achète un unique produit entre tablette, ordinateur portable, ordinateur fixe, et qu'il peut souscrire ou non une extension de garantie.

Parmi les acheteurs ayant acquis une tablette, 5% ont souscrit une extension de garantie et, parmi ceux ayant acquis un ordinateur fixe, 12,5% ont souscrit une extension de garantie.

On choisit au hasard un de ces acheteurs.

On note :

T l'évènement « l'acheteur a choisi une tablette » ;

M l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur portable » ;

F l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur fixe » ;

G l'évènement « l'acheteur a souscrit une extension de garantie ».

1. Construire un arbre pondéré en indiquant les données de l'énoncé.

2. Calculer $P(F)$ la probabilité de l'évènement F , puis $P(F \cap G)$.

3. On sait de plus que 12% des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie. Déterminer la probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie.

4. Montrer que $P(G) = 0,164$.

5. Pour tous les appareils, l'extension de garantie est d'un montant de 50 euros. Quelle recette complémentaire peut espérer le responsable du rayon lorsque 1 000 appareils seront vendus ?

EXERCICE 4 (4 points) Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Les résultats décimaux seront arrondis au millième pour tout l'exercice.

Partie A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

– 80% de CDI (contrat à durée indéterminée)

– 20% de CDD (contrat à durée déterminée).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Calculer le pourcentage de CDD sur chaque site de production.

2. Pour une proportion $p = 0,8$, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95% relatifs aux échantillons de taille n , pour $n = 421$ et pour $n = 68$.

3. Comment la direction de la société peut-elle interpréter les intervalles obtenus dans la question précédente ?

Partie B

Dans cette partie, on convient que l'on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque $n > 30$, $np > 5$ et $n(1 - p) > 5$, où p désigne la proportion dans une population, et n désigne la taille d'un échantillon de cette population.

La direction de cette même société tolère 7% de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7%. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. S'il prélève un échantillon de 50 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%? Expliquer.
2. S'il prélève un échantillon de 100 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%? Expliquer.
3. Le responsable du site de production prélève un échantillon de taille 100, dans lequel 9 composants électroniques s'avèrent défectueux. Comment peut-il interpréter ce résultat ?

4. Asie Juin 2013

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. On choisit au hasard un réel de l'intervalle $[-2; 5]$.

Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[-1; 1]$?

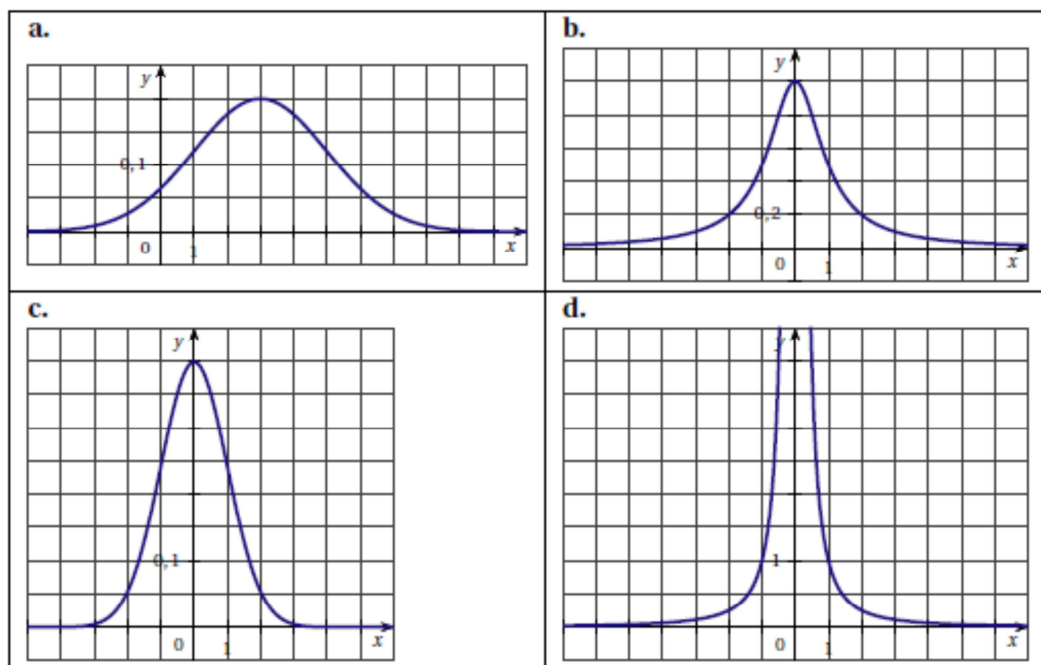
- a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{2}{7}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 0,7

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 3 et d'écart type 2.

Quelle est la valeur arrondie au centième de la probabilité $P(X \leq 1)$?

- a. 0,16 b. 0,68 c. 0,95 d. 0,99

3. Quelle courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$?



4. Lors d'un sondage avant une élection, on interroge 800 personnes (constituant un échantillon représentatif). 424 d'entre elles déclarent qu'elles voteront pour le candidat H.

Soit p la proportion d'électeurs de la population qui comptent voter pour H.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion p ?

- a. $[0,46; 0,60]$ b. $[0,48; 0,58]$ c. $[0,49; 0,57]$ d. $[0,51; 0,55]$

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de terminale selon la série et le sexe, à la rentrée 2010.

	Filles	Garçons
Littéraire (L)	10872	11080
Sciences économiques et sociales (ES)	63472	40506
Scientifiques (S)	71765	87031
Total	176109	138617

Source : Ministère de l'Éducation nationale, DEPP

Notations : $p(A)$ désigne la probabilité d'un évènement A.

$p_A(B)$ désigne la probabilité d'un évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

On choisit au hasard un élève de terminale de série générale.

On note : F : l'évènement « L'élève choisi est une fille ». G : l'évènement « L'élève choisi est un garçon ».

L : l'évènement « L'élève choisi est en série Littéraire ».

ES : l'évènement « L'élève choisi est en série Sciences Économiques et Sociales ».

S : l'évènement « L'élève choisi est en série Scientifique ».

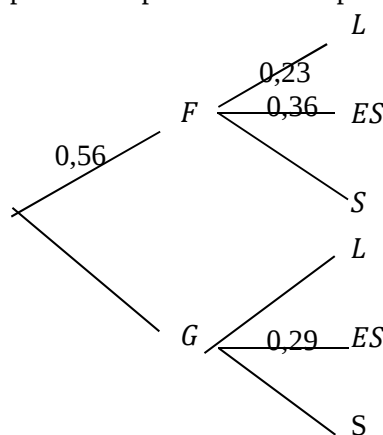
Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. En utilisant les effectifs inscrits dans le tableau :

a. Sachant qu'on interroge un garçon, calculer la probabilité qu'il soit en série Littéraire.

b. Calculer $p(S)$.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



3. En utilisant l'arbre complété et les propriétés des probabilités :

a. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que l'élève choisi soit un élève de la série Sciences Économiques et Sociales est égale à 0,33.

b. Calculer $p_{ES}(F)$

4. On choisit successivement et au hasard 10 élèves de terminale de série générale. On admet que le nombre de lycéens est suffisamment grand pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise. Calculer la probabilité de choisir exactement trois élèves de la série ES.

EXERCICE 3 (6 points) Commun à tous les candidats

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.

Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.

2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 210$.

On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n) .

3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.

Préciser son premier terme.

b. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n = 700 - 100 \times 0,7^n$.

4. a. Soit n un entier naturel.

Démontrer que $u_n \geq 697$ est équivalent à $0,7^n \leq 0,03$.

b. Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

Variables : N est un nombre entier naturel

Initialisation : Affecter à N la Valeur 0

Affecter à U la valeur 1

Traitement : Tant que $U > 0,03$

Affecter à N la valeur $N + 1$.

Affecter à U la valeur $0,7 \times U$.

Fin du Tant que

Sortie : Afficher N .

Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? (On fera tourner l'algorithme).

c. Retrouvez ce résultat en résolvant l'inéquation $0,7^n \leq 0,03$

d. En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n) déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

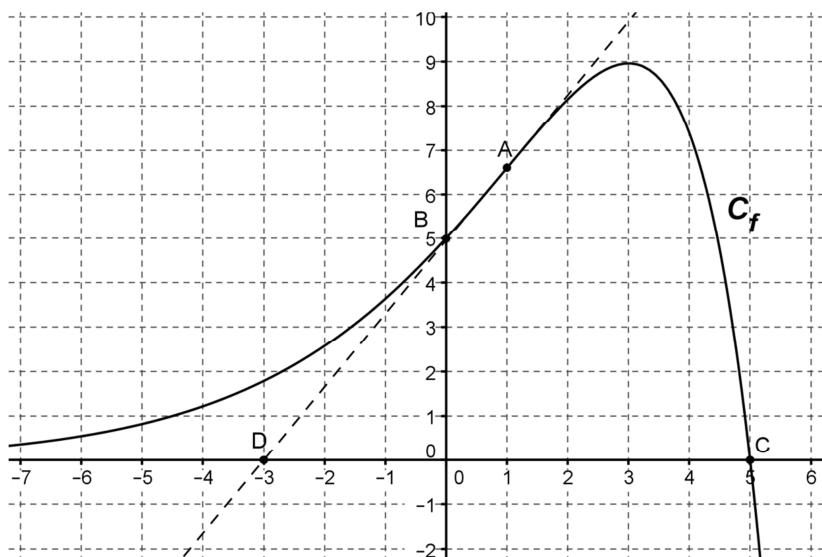
EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

Elle passe par les points $A(1 ; 4e^{0,5})$, $B(0 ; 5)$ et $C(5 ; 0)$

Le point $D(-3 ; 0)$ appartient à la tangente à C_f au point A .

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Par lecture graphique

1. Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.

2. Que semble représenter le point A pour la courbe C_f ?

3. a. Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \int_0^3 f(x)dx$ unités d'aires.

b. Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :

$$0 \leq I \leq 9$$

$$10 \leq I \leq 12$$

$$20 \leq I \leq 24$$

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x , $f(x) = (-x + 5)e^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5 - 0,5x)e^{0,5x}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. a. Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = 0,25(-x + 1)e^{0,5x}$

b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe C_f

c. Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.

2. Soit F la fonction définie, pour tout réel x , par $F(x) = (-2x + 14)e^{0,5x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Calculer $I = \int_0^3 f(x)dx$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

5. Centres étrangers Juin 2013

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville.

Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.

En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.

On note u_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012+n.

On a donc $u_0 = 40000$.

On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,875u_n + 1200$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 9600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur de u_1 est : a. 6 200 b. 35 000 c. 36 200 d. 46 200

2. La suite (v_n) est :

a. géométrique de raison $-12,5\%$ c. géométrique de raison $-0,875$
b. géométrique de raison $0,875$ d. arithmétique de raison -9600

3. La suite (u_n) a pour limite : a. $+\infty$ b. 0 c. 1200 d. 9600

4. On considère l'algorithme suivant :

Cet algorithme permet d'obtenir :

a. la valeur de u_{40000}
b. toutes les valeurs de u_0 à u_n
c. le plus petit rang n pour lequel on a $u_n \leq 10000$
d. le nombre de termes inférieurs à 1 200

5. La valeur affichée est :

a. 33 b. 34 c. 9600 d. 9970,8

VARIABLES :

U, N

INITIALISATION :

U prend la valeur 40 000

N prend la valeur 0

TRAITEMENT :

Tant que $U > 10000$

N prend la valeur $N + 1$

U prend la valeur $0,875 \times U + 1200$

Fin du Tant que

SORTIE :

Afficher N

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.

On sait que :

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».

L'évènement contraire de l'évènement A sera noté $\bar{A}$.

On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
3. Définir par une phrase l'évènement $E \cap V$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à 0,205.
5. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.
Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à 0,001 près.
6. Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de 45 000 sacs. Chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu 0,80 euro sur l'exploitation agricole et 3,40 euros dans des supermarchés.
Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

EXERCICE 3 (6 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 8]$ par : $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1° Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2; 8]$, on a : $f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$

2° a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2; 8]$.

b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2; 8]$.

3° On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2; 8]$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 8]$, on a : $f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$

a. Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8 ; 8]$.

b. Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4° On considère la fonction F définie sur $[2; 8]$ par : $F(x) = -x + 10 \ln x + \frac{16}{x}$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[2; 8]$.

b. Calculer $I = \int_2^8 f(x) dx$

EXERCICE 4 (4 points) Commun à tous les candidats

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20; 120]$.

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

b. Calculer l'espérance mathématique de D . Interpréter ce résultat.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minutes) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120 ; 400)$

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J .

b. Montrer l'équivalence : $90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$

c. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J-120}{20}$

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X .

d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1° Parmi toutes les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :

- (a) $x^3 - 3x^2 + 4$ (b) $\ln(x)$ (c) $-e^x$ (d) $x^2 + x + 5$

2° Une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ définie par $f(x) = \ln(x)$ est la fonction F définie par :

- (a) $F(x) = \frac{1}{x}$ (b) $F(x) = x \ln(x) - x$ (c) $F(x) = x \ln(x)$ (d) $F(x) = \ln(x)$

3° La valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{2x} dx$ est égale à :

- (a) 3,19 (b) $e^2 - 1$ (c) $\frac{1}{2}e^2$ (d) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

4° Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1 ; 4)$, alors une valeur approchée au centième de $P(2 \leq x \leq 3)$ est : 0,15 (b) 0,09 (c) 0,34 (d) 0,13

5° Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaits de leur maire. L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la popularité du maire est :

- (a) $[0,35 ; 0,75]$ (b) $[0,40 ; 0,70]$ (c) $[0,45 ; 0,65]$ (d) $[0,50 ; 0,60]$

Exercice II (5 points)**Partie A :**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$

1° on considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$

1°a) démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

1°b) Exprimer v_n en fonction de n .

1°c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$

2° Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n) .

Partie B :

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10% des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville.
- 1200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1° Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012 + n

2° Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année 2012 + n

3° a) Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$

3°b) En donner une interprétation.

VARIABLES

a, i, n

INITIALISATION

Choisir n

a prend la valeur 10

TRAITEMENT

Pour i allant de 1 à n

a prend la valeur ...

SORTIE

Afficher a

Exercice III (5 points)

Partie A :

On considère la fonction C définie sur $[5 ; 60]$ par : $C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$

On désigne par C' la dérivée de la fonction C .

1° Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$

$$C'(x) = \frac{0,1x e^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$$

2° On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par $f(x) = 0,1x e^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$

2°a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$

2°b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α appartenant dans $[5 ; 60]$

2°c) Donner un encadrement à l'unité de α

2°d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$

3° En déduire le tableau de variations de C sur $[5 ; 60]$

4° En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

(a) $C(x) = 2$

(b) $C(x) = 5$

Partie B :

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

Exercice IV (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70% des heures sont creuses.

Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20% des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90% des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les événements :

- C : « l'heure est creuse »
- T : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.

4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
- 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
- 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X .

6. Déterminer l'espérance de X .

7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine.

Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

7. Sujet national (annulé) Juin 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$	-5	-1	7	$+\infty$
$f(x)$					

- L'intégrale $\int_{-1}^7 f(x)dx$ est strictement positive.
- L'intégrale $\int_{-1}^7 f(x)dx$ est strictement négative.
- L'intégrale $\int_{-1}^7 f(x)dx$ est nulle.
- Le tableau de variations ne permet pas de connaître le signe de l'intégrale $\int_{-1}^7 f(x)dx$.

2. Dans une ville de 23 000 habitants, la municipalité souhaite connaître l'opinion de ses concitoyens sur la construction d'un nouveau complexe sportif.

Afin de l'aider dans sa décision, la municipalité souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes favorables à la construction de ce complexe sportif, au niveau de confiance de 95% avec un intervalle d'amplitude inférieure à 4%.

Le nombre minimum de personnes que la municipalité doit interroger est de :

- 625
- 2500
- 920
- 874

3. Soit f la fonction dérivable définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{x+1} - 4$.

Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 admet pour équation :

- $y = x + 3$
- $y = x - 5$
- $y = -x - 3$
- $y = 2x - 6$

4. On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x + \ln 2 \geq \ln(3x - 6)$

L'ensemble des solutions est :

- $]2; 6]$
- $[6; +\infty[$
- $]0; 6]$
- $]0; 4]$

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.

Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.

On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par une suite (U_n) . On a donc $U_0 = 120000$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120000 \times 0,98^n$.

2. a. Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

b. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.

Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90000$.

1	Variables :	A est un réel
2		n est un entier naturel
3		
4	Initialisation :	Affecter à A la valeur 120 000
5		Affecter à n la valeur 0
6		
7	Traitement :	Tant que $A > 90000$
8		n prend la valeur . . .
9		. . .
10		Fin Tant que
11		
12	Sortie :	Afficher n

3. a. Exprimer $1 + 0,98 + 0,98^2 + \dots + 0,98^n$ en fonction de n .

b. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Montrer que $S_n = 6\,000\,000 \times (1 - 0,98^{n+1})$

c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis éventuellement au millième.

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles.

Partie A : Étude du processus de mise en bouteille

La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans 2 machines $M1$ et $M2$. La machine $M1$ remplit la bouteille de lait et la machine $M2$ met le bouchon.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5% des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8% ont un bouchon. D'autre part, 4% des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon.

On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note :

- R, l'évènement : « la bouteille est correctement remplie » ;
- B, l'évènement : « la bouteille a un bouchon ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.

3. Montrer que la probabilité que la bouteille ait un bouchon est égale à 0,916.

4. Sachant que la bouteille a un bouchon, déterminer la probabilité qu'elle soit correctement remplie.

Partie B : Production journalière

Une étude sur les dix premières années a montré que la production journalière de bouteilles de lait dans cette entreprise peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 2 000 et d'écart type 200.

1. Calculer la probabilité que la production journalière soit comprise entre 1 800 et 2 200 bouteilles.

2. Le service maintenance doit intervenir sur les machines si la production journalière devient inférieure à 1600 bouteilles. Déterminer la probabilité que le service maintenance intervienne sur les machines.

Rappel : Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

alors : $P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0,683$

$P(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0,954$

$P(X \in [\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]) \approx 0,977$

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant la ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce.

L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A :

Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(t) = 25e^{-0,5t}$

où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

1. Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année.

Arrondir à 1%.

2. a. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par

$$F(t) = -50e^{-0,5t}$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

b. Calculer la valeur exacte de

$$\int_2^4 25e^{-0,5t} dt$$

c. En déduire la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année.

Partie B :

Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année.

L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4 ; 10]$ par :

$$g(t) = 20e^{-0,1t^2} + t - 4,65$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g .

Montrer que pour réel t de l'intervalle $[4 ; 10]$, $g'(t) = -4t e^{-0,1t^2} + 1$.

2. On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle $[4 ; 10]$. Donner la valeur arrondie au dixième de α

a. En déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

b. Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

c. Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes ?

8. SUJET NATIONAL 21 Juin 2013

EXERCICE 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.

La production journalière de l'usine A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à 0,014.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à 0,024.

On note : • D l'évènement : « le composant présente un défaut de soudure »

• A l'évènement : « le composant est produit par l'unité A »

• B l'évènement : « le composant est produit par l'unité B »

On note $p(D)$ la probabilité de l'évènement D et $p_A(D)$ la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.

Partie A : généralités

1. a. D'après les données de l'énoncé, préciser $p_A(D)$ et $p_B(D)$
b. Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :
3. a. Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.
b. En déduire $p(D)$.
4. On prélève dans la-production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Partie B : contrôle de qualité

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms. On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200,5$ et d'écart-type $\sigma = 3,5$.

On prélève un composant dans la production.

Les résultats seront arrondis à 0,0001 près ; ils pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe 1.

1. Calculer la probabilité p_1 de l'évènement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».
2. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement : « La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».
3. On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

Annexe 1 : extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200$ et $\sigma = 3,5$

t	$p(X \leq t)$	t	$p(X \leq t)$	t	$p(X \leq t)$
186	0,0000	196	0,0993	206	0,9420
187	0,0001	197	0,1587	207	0,9684
188	0,0002	198	0,2375	208	0,9839
189	0,0005	199	0,3341	209	0,9924
190	0,0013	200	0,4432	210	0,9967
191	0,0033	201	0,5568	211	0,9987
192	0,0076	202	0,6659	212	0,9995
193	0,0161	203	0,7625	213	0,9998
194	0,0316	204	0,8413	214	0,9999
195	0,0580	205	0,9007	215	1,0000

EXERCICE 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse, en justifiant.

Question 1 Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2500 euros. A partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0 = 2500$ sur un compte rapportant 0,2% d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425 euros par mois.

On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra : $c_1 = 1,002 \times c_0 - 425 = 2080$ euros.

L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juillet 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :

$$c_0 = 2500$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, c_{n+1} = 1,002 \times c_n - 425$$

PROPOSITION : Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

Question 2 Sur $I =]0 ; +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I .

Question 3 On définit sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = 2x \ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver((2x) * ln(x) - 2x + 5)
	$2 * \ln(x) + \frac{2 * x}{x} - 2$
2	simplifier $\left(2 * \ln(x) + \frac{2 * x}{x} - 2\right)$
	$\ln(x^2)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2 \ln x$.

Question 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0,6$.

PROPOSITION : $P(-0,6 \leq X \leq 0,6) \approx 0,68$

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0 ; 3,6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

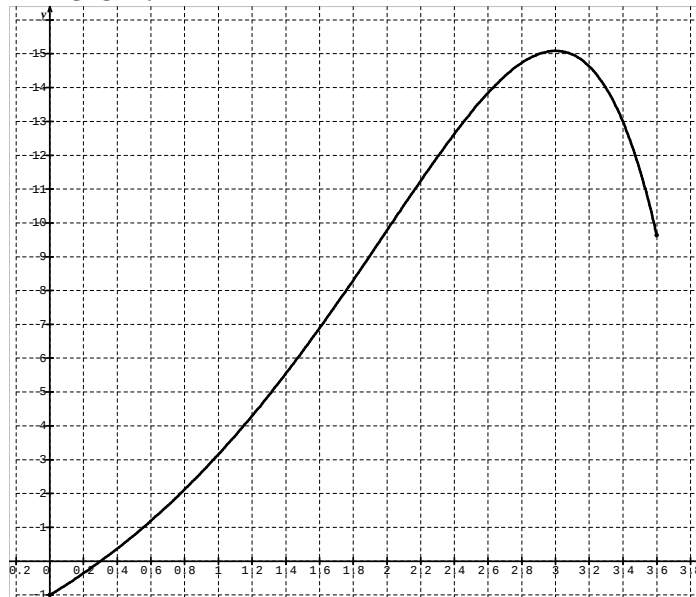
On a représenté, en annexe 2, la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

- Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
- Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Annexe 2 :



Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x)e^x.$$

1. a. On note B' la fonction dérivée de la fonction B .

Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0 ; 3,6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)e^x$.

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .

c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I . On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2. a. Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$ l'autre dans l'intervalle $[3 ; 3,6]$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Dans cet exercice on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels (redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos, . . .).

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année 1995 + n .

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x , par $f(x) = -0,0032x^3 + 0,06x^2 + 5$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leq n \leq 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année 1995+ n par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.

2. Déterminer le pourcentage p , de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.

(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul : $p = \frac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1% près.)

3. En utilisant la fonction f , quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013 ? (On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).

4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.

On calcule pour cela $M = \frac{1}{20} \int_0^{20} f(x) dx$

a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

b. Calculer M .

9. Polynésie 2013**EXERCICE 1 (5 points)****Commun à tous les candidats**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève de point.

Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

1. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

- a. $\ln 2$ b. $-2\ln 2$ c. $2\ln 2$ d. $\frac{1}{2}\ln 2$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x , on a :

- a. $f'(x) = e^{-x}$ b. $f'(x) = -e^{-x}$ c. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ d. $f'(x) = (1+x)e^{-x}$

3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

- a. $y = 2x$ b. $y = x - 1$ c. $y = x$ d. $y = 2x - 1$

4. La fonction f est :

- a. concave sur $[0 ; 1]$ b. concave sur $[0 ; +\infty[$ c. convexe sur $[0 ; +\infty[$ d. convexe sur $[0 ; 1]$

5. L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est égale à :

- a. $e - 5$ b. 5 c. $\frac{e-2}{e}$ d. 1

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une agence de voyage propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris. Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 40% des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel »
- parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50% choisissent aussi l'option « visites guidées »
- 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

Z l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1. a. Quelle est la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion+ hôtel » et l'option « visites guidées » ?

b. Calculer la probabilité $P_A(V)$.

c. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.

b. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option «visites guidées ». Arrondir le résultat au millième.

3. L'agence pratique les prix (par personne) suivants :

Formule « avion + hôtel » : 390 € Formule « train + hôtel » : 510 €

Option « visites guidées » : 100 €

Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.

Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

année	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81295	66052	64690	63182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française)

1. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est -8,06% arrondi au centième.

On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de 8% par an à partir de 2011.

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre positif P
Traitement	Affecter la valeur 0 à la variable N {initialisation} Affecter la valeur 63 182 à U {initialisation} Tant que U > P Affecter la valeur N + 1 à N Affecter la valeur $0,92 \times U$ à U Fin de Tant que Affecter la valeur N + 2011 à N
Sortie	Afficher N

Si on saisit P = 50 000 en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

3. Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n) . On note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, et u_n le montant en 2011+n, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63\,182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8%.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .

c. Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au millier d'euros.

4. Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

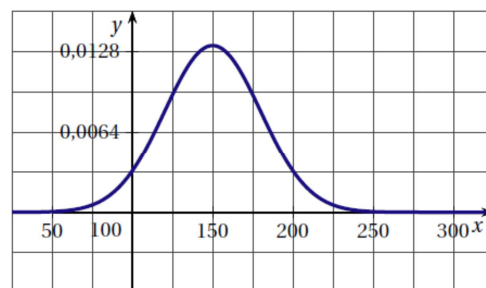
On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 30$.

La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ .

2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2} d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.

3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm. On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2} , de pêcher un poisson adulte.

4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ . Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

B. Étude de la zone 2

1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.

a. Calculer la fréquence f de poissons malades dans l'échantillon.

b. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion p de poissons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.

2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$. En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y . Justifier la réponse.

