Centres étrangers juin 2007

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution dans l'ensemble ℝ des nombres réels.

Partie A - Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x) = x - e^{-x} = x - \frac{1}{e^x}$$

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $f(x) = 0$

2. Étude du signe de la fonction f.

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur ℝ, et déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur ℝ, notée α.

2. c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

2. d. Etudier le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie B - Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$g(x) = \frac{1 + x}{1 + e^x}$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$.

On montrera que $g'(x) = \dfrac{-e^x . f(x)}{(1 + e^x)^2}$

En déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie C - Construction d'une suite de réels ayant pour limite α.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. Justifier l'égalité $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Corrigé : Centres étrangers juin 2007

Centres étrangers juin 2007

$(E) : e^x = \frac{1}{x}$

Partie A : $f(x) = x - e^{-x}$

1° pour x non nul , (0 n'est pas sol de (E) et f(0)≠ 0), on a

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \; sol \; de \; (E).$

2a) dérivée

f est dérivable sur ℝ

Pour $x \in$ ℝ : $f'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x}$

Signe de la dérivée : pour tout X de ℝ, on a $e^X > 0$, donc

Pour tout x de ℝ, on a $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur ℝ.

2b) **limite en $-\infty$**

$\underset{x\to-\infty}{lim}(-x) = +\infty \; et \; \underset{X\to+\infty}{lim} e^X = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \; \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$d'o$ù $\lim\limits_{x\to-\infty} x - e^{-x} = -\infty$

$ainsi \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$

$\underset{x\to+\infty}{lim}(-x) = -\infty \; et \; \underset{X\to-\infty}{lim} e^X = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$d'o$ù $\lim\limits_{x\to+\infty} x - e^{-x} = +\infty$

$ainsi \; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Th de la bijection,

D’après l’étude de ses variations, la fonction f est continue et strictement croissnate sur $\mathbb{R}$,
donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$
De plus $0\in \mathbb{R}$,
donc l’équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α .

2c) $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}} \approx -1{,}148 \quad et \; f(1) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$

Donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

2d) d’après le tableau de variation complété avec α solution de l’équation $f(x) = 0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

Partie B :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

1°

$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x(1+e^x) \Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$

2° d’après la partie A2, α est l’unique solution de l’équation $f(x) = 0$,
donc α est l’unique solution de l’équation $g(x) = x$
donc α est l’unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$

3° **Dérivée** Pour tout x de $[\,0\,;\;1]$, on a :

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x} - x\right)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(e^{-x} - x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x \times (-f(x))}{(1+e^x)^2}$$

Signe de la dérivée:
on a $[0\,;\alpha] \subset [0\,;1]$
Pour $\in [0\,;\alpha]$, on a :

- $f(x) \leq 0$ donc $-f(x) \geq 0$
- $e^x > 0$
- $(1+e^x)^2 > 0$

Donc $g'(x) \geq 0$
Ainsi la fonction g est croissante sur $[0\,;\ \alpha\,]$.
Partie C :
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
1° montrons par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
<u>Etape 1</u> : $n = 0$
$u_0 = 0\ \ et\ u_1 = g(u_0) = g(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad de\ plus\ \alpha \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$
Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$
L'inégalité est vraie pour $n = 0$

<u>Etape 2 :</u> on suppose que pour un entier n, on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$,
et on prouve que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$

(HR) $\quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

$donc\ \ g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$ car la fonction g est croissante sur [0 ; α]

Donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ car $g(0) = \frac{1}{2} et\ g(\alpha) = \alpha$
<u>Conclusion :</u>
d'après le principe du raisonnement par récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

2° D'après la relation établie à la question 1 , la suite (u_n) est croissante et majorée par α ,
donc la suite (u_n) converge.

3° Limite soit ℓ la limite de (u_n)
⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$ car g est continue sur l'intervalle [0 ; 1]
$\implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = g(\ell)$

⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
Donc $g(\ell) = \ell$.
D'après la question B2 , α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$ Donc $\ell = \alpha$

4° $u_4 \approx 0{,}567\ 143$