Exercices annales corrigés : Suites

Sujet national septembre 2007 (bac blanc 2008)

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan donné ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0).

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2.a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, c'est à dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots 7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) si (u_n) converge, alors $lim\, u_n = \ell$ avec ℓ réel,

$$donc\ \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell\ \ et\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}\right) = \frac{1}{3}\ell + \frac{23}{27}$$

$$donc\ \ \ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{23}{27}\ \ donc\, \frac{2}{3}\ell = \frac{23}{27}\ \ donc\ \ell\ = \frac{23}{18}$$

c) Montrons par récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n > \frac{23}{18}$

1ère étape : n = 0

On a $u_0 = 2\ et\ 2 > \frac{23}{18}$, donc $u_0 > \frac{23}{18}$. L'inégalité est vraie pour $n = 0$

2ème étape :

Hypothèse de récurrence : pour **UN** entier n, on a $u_n > \frac{23}{18}$

On prouve que $u_{n+1} > \frac{23}{18}$.

(HR) $u_n > \frac{23}{18}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n > \frac{23}{54}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} > \frac{23}{54} + \frac{23}{27}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{23}{18}$$

Conclusion : D'après le principe du raisonnement par récurrence,

pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n > \frac{23}{18}$

d) Monotonie : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27}$
- $u_n > \frac{23}{18}(\ cfq1c) \Rightarrow -\frac{2}{3}u_n < \frac{-23}{27} \Rightarrow -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27} < 0 \Rightarrow u_{n+1} -\ u_n < 0$

Ainsi la suite u est strictement décroissante·

Limite de u :

La suite u est décroissante et minorée donc convergente.

De plus , on a prouvé à la q1b : si u converge alors $\lim u = \frac{23}{18}$

Ainsi la suite u converge vers $\frac{23}{18}$

2) Etude de la suite v :

a) pour $n\ \geq\ 1$: il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$, de 1er terme $\frac{1}{10^2}$, et constituée de $(n+1) - 2 + 1$ termes , c'est-à-dire n termes.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{100} \times \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

b) pour ≥ 1 , on a :

$v_n = 1{,}27777 \ldots .7 = 1{,}2 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots + 0; 00000 \ldots 7 = 1{,}2 + 7 \times \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}\right)$

Donc d'après 2a) , on a : $v_n = 1{,}2 + 7 \times \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

Calculons $\lim v_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} 10^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0\ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{10^n}\ = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 1{,}2 + 7 \times \frac{1}{90} \times \left(1 - \frac{1}{10^n}\ \right) = 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}\ .$$

3° ⋆ la suite u est décroissante

⋆ La suite v est croissante, car $v_{n+1} - v_n = \frac{7}{10^{n+2}} > 0$ pour tout n

⋆ $\lim u = \lim v = \frac{23}{18} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$

Les trois contraintes sont vérifiées, ainsi **les suites u et v sont convergentes.**

2010 Centres étrangers

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$. On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$.

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

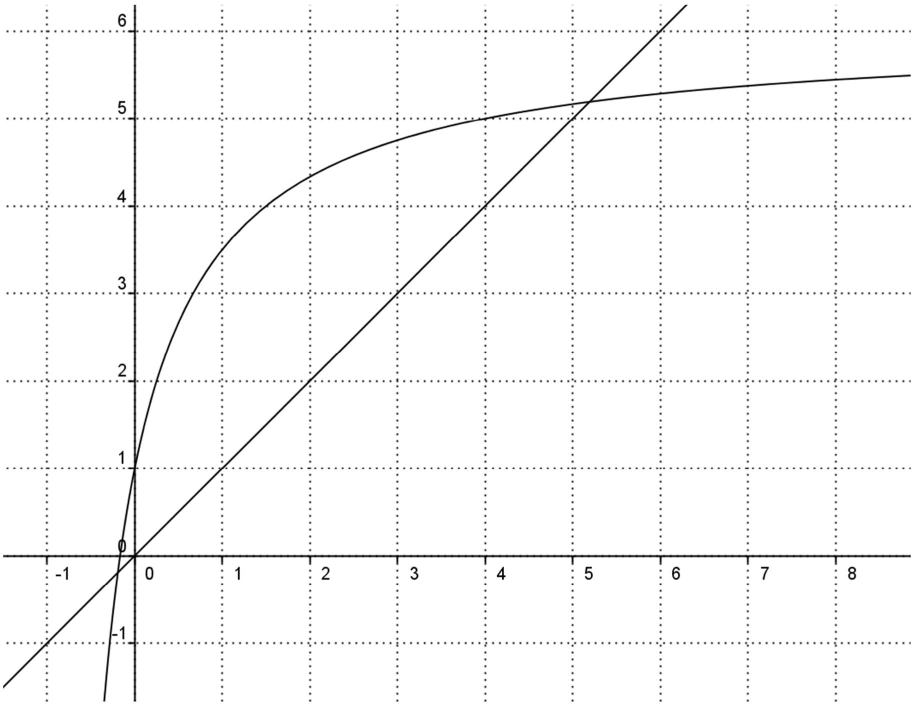
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)=6-\dfrac{5}{u_n+1}$.

a. Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.



3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$. On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$.

1.a. Dérivée :
f est une fonction rationnelle , donc f est dérivable sur son ensemble de définition [0 ; +∞ [.

Pour tout x de [0 ; +∞ [:
$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1} = 6 - 5 \times \frac{1}{x+1}$$
Avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$, ona :
$$f'(x) = -5 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{5}{(x+1)^2}$$
Signe de la dérivée
Pour tout x de [0 ; +∞ [: $(x+1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{5}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$
Sens de variation :
La fonction f est strictement croissante sur [0 ; +∞ [

1.b : résolution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$
Pour tout x de [0 ; +∞ [
$$f(x) = x$$
$$\Leftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x+1}{x+1} = x$$
$$\Leftrightarrow 6x + 1 = x^2 + x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0 \quad \Delta = 29$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \ ou \ x = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

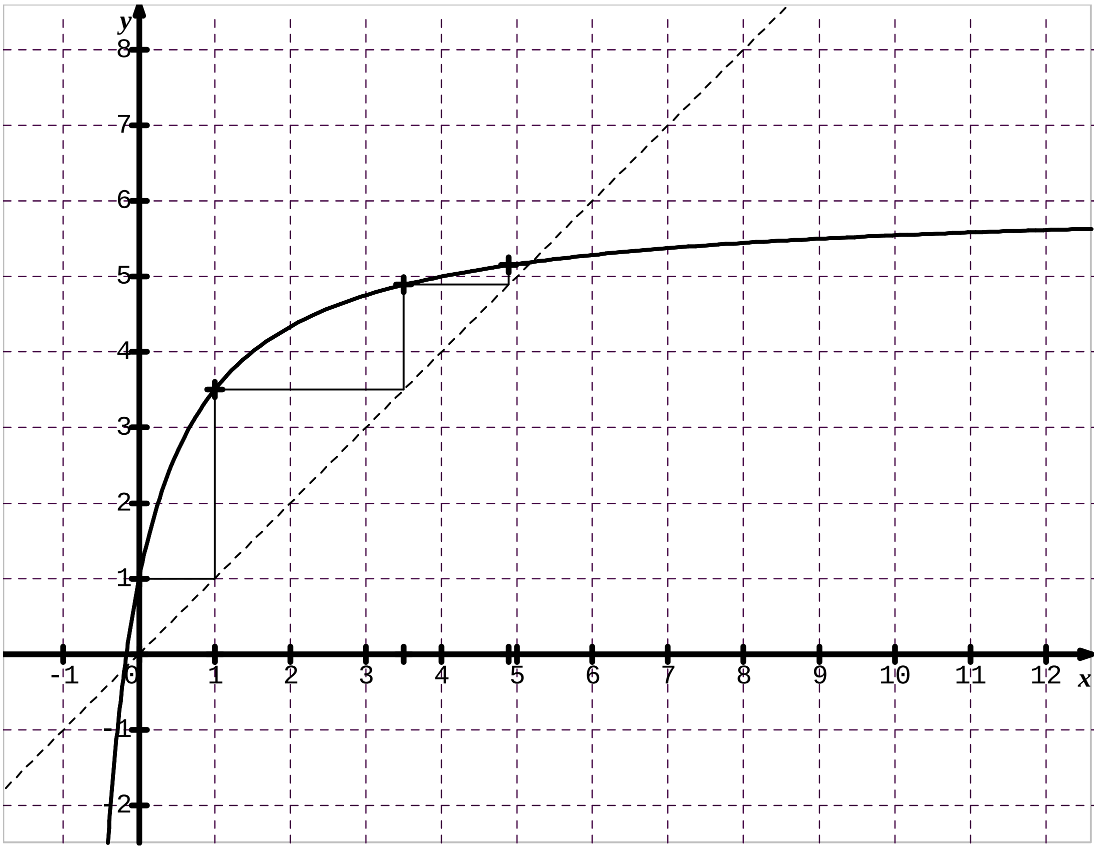
Or $\frac{5-\sqrt{29}}{2} \notin [\,0\,;\ +\infty[$
La solution de l'équation $f(x) = x$ est α , avec $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

1.c.
Pour tout x de $[0\,;\alpha[$, on a :
$0 \leq x < \alpha$
$\Rightarrow f(0) \leq f(x) < f(\alpha)$ car f est strictement croissante sur [0 ; +∞ [
Or $f(0) = 6 - 5 = 1 \quad et\ f(\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow 1 \leq f(x) < \alpha$
$\Rightarrow 0 \leq f(x) < \alpha$ car $[1\,;\alpha[\subset [0\,;\alpha[$

Ainsi, pour tout x de $[0\,;\alpha[$, on a $f(x) \in [0\,;\alpha[$

2.a.



Conjectures :

La suite (u_n) est croissante et converge vers α

2. b .

Montrons par récurrence que : **pour tout n de ℕ , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.**

1ère étape : $n = 0$

On a : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = 6 - \frac{5}{1} = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. (notons $\alpha \approx 5{,}19$)

L'inégalité est (déjà) vraie pour $n = 0$, le plus petit entier de ℕ .

2ème étape :

On suppose que pour un entier n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

On prouve que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$ car f strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

$\Rightarrow\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ car $f(0) = 1$, $f(\alpha) = \alpha$ et $u_{n+2} = f(u_{n+1})$ $u_{n+1} = f(u_n)$

$\Rightarrow\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ car $[1\,;\alpha[\subset [0\,;\alpha[$

Conclusion :

Ainsi, d'après le principe du raisonnement par récurrence , **pour tout n de ℕ , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.**

2.c. on a prouvé :

pour tout n de ℕ , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$,

on en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée par α , donc convergente vers un réel ℓ

recherche de ℓ :

$\star \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+1) = \ell+1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{u_n+1} = \dfrac{5}{\ell+1} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{\ell+1}$

$\star \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

D'où $6 - \frac{5}{\ell+1} = \ell \Longrightarrow f(\ell) = \ell \Longrightarrow \ell = \alpha$

Ainsi la suite (u_n) converge vers α

3.

- Pour toute valeur de $u_0 \in [0\,; \alpha[$, la suite (u_n) sera croissante et convergente vers α

- Pour $u_0 = \alpha$, la suite (u_n) sera constante avec $u_n = \alpha$ pour tout n de ℕ , donc convergente vers α

- Pour toute valeur de $u_0 \in]\,\alpha\,;\ +\infty[$, la suite (u_n) sera décroissante et convergente vers α

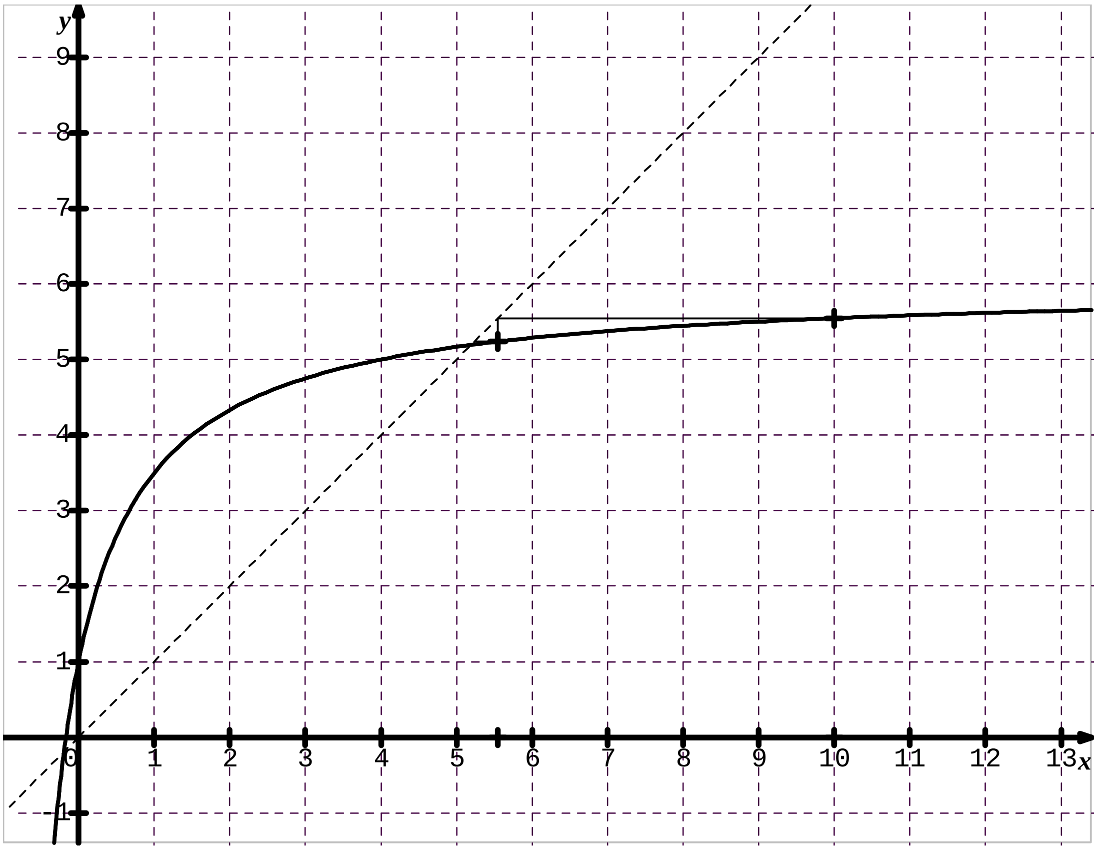
En effet dans la 1ère étape du raisonnement par récurrence , on aura $u_1 = f(u_0) < u_0$
La 2ème étape est inchangée, puisqu'elle ne dépend de la valeur de u_0
Justification : résolvons dans [[0 ; +∞ [l'inéquation

$f(x) < x \Leftrightarrow 6 - \dfrac{5}{x+1} < x$

$\Leftrightarrow 6 - x < \dfrac{5}{x+1}$

$\Leftrightarrow (6-x)(x+1) < 5 \ \ car\ x+1 > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 5x + 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha\,;\ +\infty[$



2011 centres étrangers

On considère une droite D munie d'un repère $(O\,;\vec{i})$. Soit (A_n) la suite de points de la droite D ainsi définie :

* A_0 est le point O ;

* A_1 est le point d'abscisse 1 ;

* pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. a. Placer sur un dessin la droite D, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6. On prendra 10 cm comme unité graphique.

b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n. Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

__**Correction**__

1.a .

1.b.

A_2 *est le milieu de* $[A_0A_1]$ *d'abscisses respectives* a_0 *et* a_1 :

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$$

$a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right) = \frac{11}{16}$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_4 + a_5) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{11}{16}\right) = \frac{21}{32}$

1c . A_{n+2} *est le milieu de* $[A_nA_{n+1}]$ *d'abscisses respectives* a_n *et* a_{n+1} :

$a_{n+2} = \frac{1}{2}(\,a_n + a_{n+1})$

2 : Montrons par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$

1ère étape : $n = 0$

On a : $a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

$-\frac{1}{2}a_0 + 1 = -\frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1 = a_1$

donc l'égalité est vraie pour $n = 0$

2ème étape :

On suppose que pour un entier n, on a : $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$

et on prouve que l'égalité est vraie pour l'entier $n + 1$, $a_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1$

$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$

$\Rightarrow a_n + a_{n+1} = a_n + \left(-\frac{1}{2}a_n + 1\right)$

$\Rightarrow a_n + a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

$or \;\; a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1 \Rightarrow a_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}a_n \Rightarrow 2(a_{n+1} - 1) = -a_n \Rightarrow a_n = -2(a_{n+1} - 1)$

$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{4}\left(-2(a_{n+1} - 1)\right) + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1$

Conclusion :

D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$

3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$

$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}$

$\quad = \left(-\frac{1}{2}a_n + 1\right) - \frac{2}{3}$

$\quad = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}$

$\quad = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$

$\quad = -\frac{1}{2}v_n$

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

4 . Limites

$$-1 < -\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(v_n + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(v_n + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

2010 septembre Antilles

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.
b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{3}{4}$$

$u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ mais $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$ mais $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ les quotients sont différents donc la suite (u_n) n'est pas géométrique

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

2.a. $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

2.b. Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

2.c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2.d. La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit que $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

3. a. $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$

3. b. pour tout n de $\mathbb{N}$

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{2\left(v_n + \frac{1}{2}u_n\right)}{v_n} = \frac{2v_n + u_n}{v_n} = \frac{2v_n}{v_n} + \frac{u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

3.c. Pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$

3.d. D'après 3.c., la suite (w_n) est arithmétique de raison 2

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $w_n = w_0 + 2 \times n = -1 + 2n$

4. Forme explicite de (u_n)

Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = v_n \times w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-1 + 2n) = \frac{2n-1}{2^n}$

5. Pour tout entier naturel n, on pose

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.}$$

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

<u>1ère étape :</u> démontrons que la propriété est vraie pour $n = 0$

D'une part $S_0 = u_0 = -1$

D'autre part, $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = -1$

Donc l'égalité est (déjà) vraie pour $n = 0$, le plus petit entier de $\mathbb{N}$.

<u>2ème étape :</u>

On suppose que pour une certaine valeur de l'entier n , l'égalité est vraie

c'est-à-dire que : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ est vraie. (hypothèse de récurrence)

On prouve que $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$ est vraie soit que $S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

Observez que : $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

$$\Rightarrow S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \qquad \left(\text{car d'après 4. } u_n = \frac{2n-1}{2^n} \text{ pour tout } n\right)$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2(2n+3)}{2 \times 2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 2 + \frac{-4n-6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

<u>Conclusion :</u>

Ainsi , d'après le principe du raisonnement par récurrence , pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n > 1$.