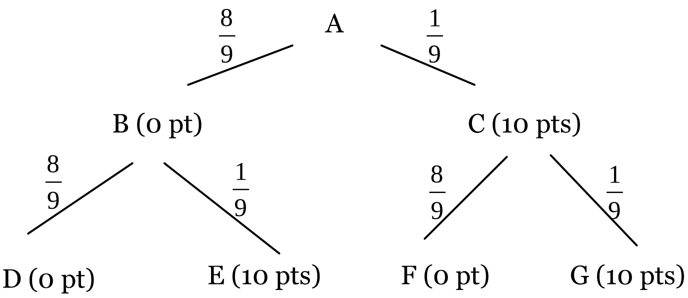
N° 68 annales Nouvelle Calédonie Novembre 2008 4 points

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.

On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passée par un noeud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.



1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

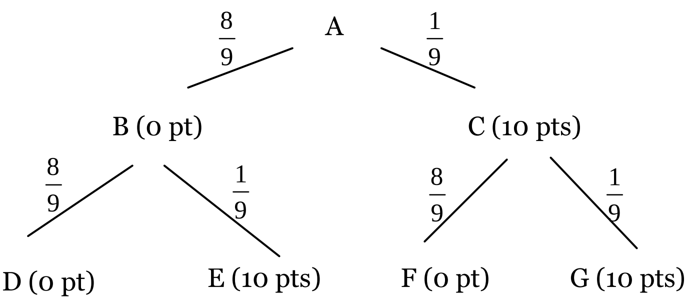
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.

On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

1°



<u>Nb de points</u> 0 10 10 20

La variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie peut prendre 3 valeurs comme indiqué sur l'arbre.

$$p(X=0)=p(\text{"BD"})=\ p(B)\times p_B(D)=\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{64}{81}$$

$$p(X=10)=p(\text{"BE"})+p(\text{CF})=\ p(B)\times p_B(D)+\ p(C)\times p_C(F)$$

$$=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{81}$$

$$p(X=20)=p(\text{"CG"})=\ p(C)\times p_C(G)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$$

D'où la loi de probabilité de X

Valeurs de X : x_i	0	10	20
$p(X = x_i)$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$

Total : 1

1° b) $E(X) = 0 \times \frac{64}{81} + 10 \times \frac{16}{81} + 20 \times \frac{1}{81} = \frac{180}{81} \approx 2{,}22$

1° c)

$$p_{(X=10)}(\text{AC}) = \frac{p\big((X = 10) \cap \text{"AC"}\big)}{p(X = 10)} = \frac{p(\text{"ACF"})}{p(X = 10)}$$

Or $p(\text{"ACF"}) = \ \ p(C) \times p_C(F) = \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{81}$

D'où

$$p_{(X=10)}(\text{AC}) = \frac{p(\text{"ACF"})}{p(X = 10)} = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points est ½

2° On répète 8 fois de manière identique et indépendante une même epreuve qui n' a que deux issues :

S « le joueur obtient 20 points » de probabilité $\frac{1}{81}$

$\bar{S}$ « le joueur n'obtient pas 20 points » de probabilité $\frac{80}{81}$

La variable aléatoire N donnant le nombre de parties gagnées, suit une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{81}$.

2° a)

$$p(N = 2) = \binom{8}{2} \times \left(\frac{1}{81}\right)^2 \times \left(\frac{80}{81}\right)^6 \approx 0{,}004$$

Ainsi, la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties est 0,004 arrondi au millième

b) La variable aléatoire N peut prendre les valeurs : 0 ;<u>1 ; 2 ; 3 ; …….. ;7 ; 8</u> parties gagnées

l gagne au moins 1 partie

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$$

$$= 1 - \binom{8}{0} \times \left(\frac{1}{81}\right)^0 \times \left(\frac{80}{81}\right)^8$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{80}{81}\right)^8$$

$$= 1 - \left(\frac{80}{81}\right)^8 \approx 0{,}095$$

Ainsi, la probabilité qu'il gagne au moins 1 partie est 0,095 arrondi au millième

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.

On choisit, au hasard, un élève du lycée. Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

2. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.

Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

3. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On suppose que les évènements A et F sont indépendants.

On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.

On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

4. On considère l'algorithme :

Entrée	A et C sont des entiers naturels
Calculs	C prend la valeur 0 Répéter 9 fois A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7. Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1 Fin Si Fin répéter
Sortie	Afficher C.

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée. Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

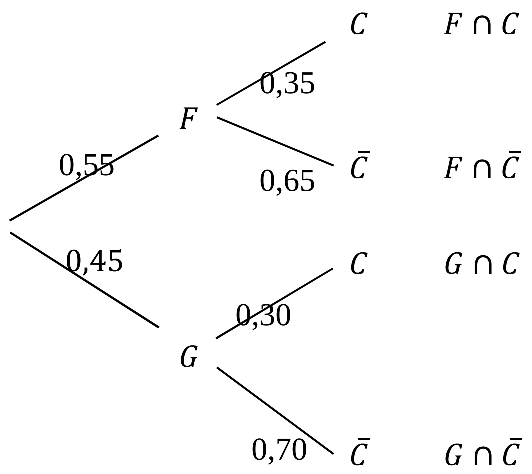
1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.

On choisit, au hasard, un élève du lycée. Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

1 arbre pondéré

On note F « l'élève choisi est une fille » G …. et C « l'élève chois déjeune à la cantine »

issues



C est la réunion de $F \cap C$ et $G \cap C$, qui sont deux événements incompatibles

Donc

$p(C) = p(F \cap C) + p(G \cap C)$

$= p(F) \times p_F(C) + p(G) \times p_G(C)$

$= 0,55 \times 0,35 + 0,45 \times 0,30$

$= 0,3275$

D'où $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 0{,}6725$

La probabilité qu'un élève ne déjeune pas à la cantine est 0,6725.

2° Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.

Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

La variable aléatoire Y peut prendre les valeurs : 0 ;1 ; $\underbrace{2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ 19\ ;\ 20}_{\text{Y supérieur ou égal à 2}}$

$$p(Y \geq 2) = 1 - \big(p(Y = 0) + p(Y = 1)\big)$$
$$= 1 - \binom{20}{0} \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{20} - \binom{20}{1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19}$$
$$\approx 0{,}931$$

3° Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On suppose que les évènements A et F sont indépendants.

On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.

On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

Données : $p((A) = 0{,}02 \quad p(A \cup F) = 0{,}069$

A et F indépendants

$$p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F)$$
$$\Leftrightarrow p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A) \times p(F) \; car\ A\ et\ F\ indépendants$$
$$\Leftrightarrow 0{,}069 = 0{,}02 + p(F) - 0{,}02p(F)$$
$$\Leftrightarrow 0{,}049 = 0{,}98p(F)$$
$$\Leftrightarrow p(F) = \frac{0{,}049}{0{,}98}$$
$$\Leftrightarrow p(F) = 0{,}05$$

4° On considère l'algorithme :

Entrée	A et C sont des entiers naturels
Calculs	C prend la valeur 0 Répéter 9 fois A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7. Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1 Fin Si Fin répéter
Sortie	Afficher C.

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée. Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

On répète 9 fois de manière identique et indépendante (car valeur aléatoire) une même expérience qui n' a que deux issues : S « le nombre aléatoire est 6 ou 7 » de probabilité $\frac{2}{7}$

$\bar{S}$ « le nombre aléatoire est 1, 2 , 3, 4 ou 5 » de probabilité $\frac{5}{7}$

La variable aléatoire X prenant la valeur C affichée, c'est à-dire le nombre de succès obtenu, suit une loi binomiale de paramètres 9 et $\frac{2}{7}$.